解答例

STEP I 1995、第 7 問

純粋数学 ・ ベクトルと三角形

> **STEP I 1995、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q7

鍵となる考え方

A, B, C から等距離にある点を原点にとると、位置ベクトル（position vector）$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の長さはすべて等しくなる。この一つの事実がすべてを担う。長さの等しいベクトルについては $(\mathbf{b}+\mathbf{c})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{b}) = |\mathbf{c}|^2 - |\mathbf{b}|^2 = 0$ が成り立つからである。Q の位置ベクトルが $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ という見事に簡単な形になることがわかれば、どちらの小問も一、二行の計算で片づく。

解答

原点の選び方

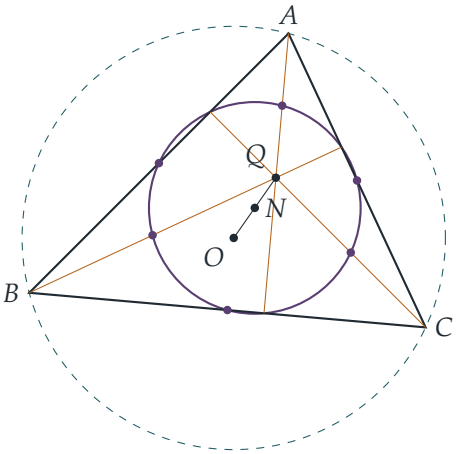
A と B から等距離にある点全体は AB の垂直二等分線（perpendicular bisector）、すなわち AB に垂直な直線をなす。B と C についても同様である。A, B, C は同一直線上にない（not collinear）ので、AB と BC は平行でなく、したがってそれらの垂直二等分線も平行でない。よってこの二直線はちょうど 1 点で交わり、その点は A と B から等距離、かつ B と C から等距離であるから、3 点すべてから等距離である。（これは三角形の外心（circumcentre）である。）

この点を O とし、A, B, C の位置ベクトルを $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ と書き、共通の距離を R とする。すなわち

$$|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = R.$$

重心（centroid）の位置ベクトルは $\mathbf{g} = \frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$ である。$\overrightarrow{GQ} = 2\overrightarrow{OG}$ は $\mathbf{q} - \mathbf{g} = 2\mathbf{g}$ を意味するから、

$$\mathbf{q} = 3\mathbf{g} = \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}, \qquad \mathbf{n} = \tfrac{1}{2}\mathbf{q} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}).$$



図には、A, B, C を通り O を中心とする円（破線）、Q で交わる 3 本の垂線、および小問 (ii) の 6 つの中点を通る、N を中心とする半径 $\frac{1}{2}R$ の円を示している。

小問 (i)

$\overrightarrow{AQ} = \mathbf{q} - \mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ および $\overrightarrow{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$ であるから、

$$\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{BC} = (\mathbf{c} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{b}) = |\mathbf{c}|^2 - |\mathbf{b}|^2 = R^2 - R^2 = 0,$$

ここで交差項を打ち消すのに $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{b}$ を用いた。よって $\overrightarrow{AQ}$ は $\overrightarrow{BC}$ に垂直である。

? **考えてみよう** $\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ から、本当に Q が A から下ろした垂線（altitude）上にあるといえるだろうか。$\overrightarrow{AQ}$ が零ベクトルの場合はどうか。

$Q \neq A$ ならば、直線 AQ は A を通り BC に垂直であるから、これは A から下ろした垂線**そのもの**であり、Q はその上にある。$Q = A$ の場合（これはちょうど $\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$、すなわち BC が直径で A における角が直角であるときに起こる）は、Q が A からの垂線上にあるのは自明である。いずれにせよ、Q は A からの垂線上にある。

この議論のどこにも A を特別扱いした部分はない。式 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ は対称であるから、同様にして

$$\overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{CA} = (\mathbf{c} + \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{c}) = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{c}|^2 = 0,$$
$$\overrightarrow{CQ} \cdot \overrightarrow{AB} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 = 0,$$

となり、Q は B からの垂線上にも C からの垂線上にもある。したがって 3 本の垂線はすべてただ 1 点 Q を通る。すなわち 3 本の垂線は 1 点で交わる（concurrent）。（Q は垂心（orthocentre）である。）

小問 (ii)

AQ の中点の位置ベクトルは $\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{q}) = \mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ であるから、N からの変位は

$$\mathbf{a} + \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) - \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \tfrac{1}{2}\mathbf{a}.$$

BC の中点の位置ベクトルは $\frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ であるから、N からの変位は

$$\tfrac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) - \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) = -\tfrac{1}{2}\mathbf{a}.$$

これらの長さはいずれも $\frac{1}{2}|\mathbf{a}| = \frac{1}{2}R$ である。

同じ対称性により、BQ と CA の中点は N から $\pm\frac{1}{2}\mathbf{b}$ だけ、CQ と AB の中点は $\pm\frac{1}{2}\mathbf{c}$ だけ変位している。$|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = R$ であるから、6 つの中点はすべて N から距離 $\frac{1}{2}R$ にあり、これが示すべきことであった。実際には、もう少し多くのことを示している。AQ の中点と BC の中点はこの円の直径の両端にあり、残りの 2 組についても同様である。

検算

- 正三角形の場合：このとき $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = \mathbf{0}$ であるから、O, G, Q, N はすべて一致し、6 つの中点はすべて中心から距離 $\frac{1}{2}R$ にあるはずである。実際、辺の中点は距離 $R\cos 60^\circ = \frac{1}{2}R$ にあり、AQ などの中点は半径のちょうど中央にある。
- A が直角の場合：このとき、上の議論が予測するとおり $Q = A$ となる。直角をはさむ 2 辺そのものが A を通る垂線だからである。
- 数値的には、10^5 個の三角形を無作為に生成し、外心を直接計算して、$Q = \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ であること、3 つの内積（dot product）がすべて 0 になること、6 つの中点がすべて N から距離 $\frac{1}{2}R$ にあることを確かめた。相対誤差の最大値は約 10^{-13} であった。

よくある間違い

- $\overrightarrow{GQ} = 2\overrightarrow{OG}$ を $\mathbf{q} = 2\mathbf{g}$ と読んでしまう。これは $\mathbf{q} - \mathbf{g} = 2\mathbf{g}$ という意味であり、したがって $\mathbf{q} = 3\mathbf{g}$ である。
- 垂直性を 1 つ示しただけで止めてしまう。1 点で交わることを示すには Q が 3 本すべての垂線上にあることが必要である。同じ計算が B と C についても成り立つことを明記すること。
- 原点の存在の根拠を書き忘れる。原点が存在する理由は、平行でない 2 辺の垂直二等分線が必ず交わることである。

STEP のその先へ

$\mathbf{q} = 3\mathbf{g}$ かつ $\mathbf{n} = \frac{3}{2}\mathbf{g}$ であるから、点 O, G, N, Q はすべて一直線上にあり、$OG : GQ = 1 : 2$ となる。この直線が**オイラー線**（Euler line）である（オイラー（Euler））。小問 (ii) の円は**九点円**（nine-point circle）である。この円は 3 本の垂線の足（図にも見える）も通る。各垂線の足からは、AQ の中点と BC の中点を結ぶ直径のような直径が直角に見込まれるからである。対称な式に仕事をさせるように巧みな原点を選ぶことは、ベクトル幾何や線形代数で繰り返し現れる技法である。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）はベクトルと内積の道具をさらに発展させており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題）にはこの精神に沿った STEP 風の幾何の問題がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。