解答例

STEP I 1995、第 6 問

純粋数学 ・ ベルヌーイ型微分方程式

STEP I 1995、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/95-s1-q6

鍵となる考え方

どちらの方程式も y について線形（linear）ではないが、それぞれ $1/y$ の適当なべきについては線形である。左辺には y'/y^2 が含まれており、これは（符号を除いて）$1/y$ の導関数（derivative）である。したがって $u = 1/y$ とおくと、方程式は u についての 1 階線形微分方程式（first-order linear equation）になり、積分因子（integrating factor）を用いれば解ける。小問 (ii) では y'/y^3 という項があるので、代わりに $1/y^2$ を考えればよいと見当がつく。

解答

小問 (i)

$u = 1/y$ とおく。合成関数の微分法（chain rule）により

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

であるから、方程式の第 1 項はちょうど $-\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ であり、第 2 項は u である。よって方程式は

$$-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u = \mathrm{e}^{2x}, \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - u = -\mathrm{e}^{2x}.$$

となる。これは u について線形である。積分因子は $\mathrm{e}^{\int -1\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-x}$ であり、両辺に掛けると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u\,\mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \mathrm{e}^{-x}u = -\mathrm{e}^{x}.$$

を得る。A を任意定数として積分すると

$$u\,\mathrm{e}^{-x} = A - \mathrm{e}^{x}, \qquad \text{よって} \qquad u = A\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{2x}.$$

$y = 1/u$ であるから

$$y = \frac{1}{Ae^x - e^{2x}},$$

となり、これが求める一般解（general solution）である。（元の方程式は $1/y$ を含むので、つねに $y \neq 0$ であり、この置換（substitution）によって失われる解はない。この式は $Ae^x \neq e^{2x}$ となる任意の区間で成り立つ。すなわち、$A > 0$ のときは $x = \ln A$ を避ければよい。）

小問 (ii)

考えてみよう ここで $u = 1/y$ の役割を果たす置換は何か。

新しい変数の導関数から y'/y^3 が現れるようにしたい。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{y^2}\right) = -\frac{2}{y^3}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

であるから、$v = 1/y^2$ とおくのが正しい選び方である。このとき第 1 項は $-\frac{1}{2}\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$、第 2 項は v となるので

$$-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v = e^{2x}, \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - 2v = -2e^{2x}.$$

今度は積分因子は e^{-2x} である：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(v\,e^{-2x}) = -2e^{2x}\cdot e^{-2x} = -2.$$

B を任意定数として積分すると

$$v\,e^{-2x} = B - 2x, \qquad \text{よって} \qquad \frac{1}{y^2} = (B - 2x)\,e^{2x}.$$

したがって

$$y^2 = \frac{e^{-2x}}{B - 2x}, \qquad y = \pm\frac{e^{-x}}{\sqrt{B - 2x}}.$$

$1/y^2 > 0$ であるから $B - 2x > 0$ でなければならない。すなわち、解は $x < \frac{1}{2}B$ においてのみ存在し、符号ははじめの y の符号によって定まる（y は決して 0 にならないので、符号が変わることはない）。小問 (i) と異なり、答えは 2 つの指数関数の差にはならない。ここでは右辺の e^{2x} が積分因子 e^{-2x} とちょうど打ち消し合い、積分すべきものが定数だけになる。線形の項 $-2x$ が現れるのはこのためである。

検算

- (ii) に代入して確かめる：$1/y^2 = (B - 2x)e^{2x}$ を微分すると $-2y'/y^3 = -2e^{2x} + 2(B - 2x)e^{2x}$ となるので、$y'/y^3 = e^{2x} - 1/y^2$ であり、これはもとの方程式そのものである。

- 数値的に確かめる：(ii) で $y(0) = 1$ とすると $B = 1$ となり、公式から $y(0.4) = \mathrm{e}^{-0.4}/\sqrt{0.2} \approx 1.49888$ が予測される。微分方程式を $x = 0$ から数値的に解き進めると、小数第 10 位まで同じ値が得られる。また、どちらの一般解も、多数の無作為な点と定数の値についてそれぞれの方程式を満たす。

よくある間違い

- $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ のマイナス符号（小問 (ii) では係数 2）を忘れ、線形方程式が台無しになる。
- 小問 (ii) で正の平方根だけを書いてしまう、あるいは解が $x < \frac{1}{2}B$ を必要とすることに気づかない。

STEP のその先へ

どちらの方程式もベルヌーイ方程式（Bernoulli equation）$y' + P(x)y = Q(x)y^n$ の例である。y^n で割って $u = y^{1-n}$ とおけば、つねに線形方程式が得られる。ここでは小問 (i) が $n = 2$、小問 (ii) が $n = 3$ の場合にあたる。解が有限の x で「爆発（blow up）」しうること（$x \to \frac{1}{2}B$ のときのように）は非線形方程式に典型的な性質であり、常微分方程式（ODE）の最初の講義で学ぶ。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）を参照のこと。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。