解答例

STEP I 1995、第 5 問

純粋数学 ・ 二項級数と積分

> **STEP I 1995、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q5

鍵となる考え方

多項式を項別に微分（differentiate term by term）すると、扱いにくい $1/r$ という因子が消え、残るのはほとんど二項展開（binomial expansion）そのものである。係数 $(-1)^{r+1}\binom{n}{r}$ は、$-(1-x)^n$ から定数項を除いたものの係数にちょうど一致する。f' がわかれば、微積分学の基本定理（fundamental theorem of calculus）（$\mathrm{f}(0)=0$ とあわせて）により f が積分として表され、置換（substitution）$y=1-t$ によって求める形に変形できる。そこに現れる被積分関数は等比級数（geometric series）であり、ただちに積分できる。

解答

導関数

次のようにおく。

$$\mathrm{f}(x)=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r+1}\binom{n}{r}\frac{x^r}{r}.$$

これは多項式であるから、項別に微分してよい。

$$\mathrm{f}'(x)=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r+1}\binom{n}{r}x^{r-1}.$$

$x \neq 0$ のとき、両辺に x を掛け、$(-1)^{r+1}x^r = -(-x)^r$ を用いると、

$$\begin{aligned} x\,\mathrm{f}'(x) &= -\sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r}(-x)^r \\ &= -\Big(\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}(-x)^r - 1\Big) \\ &= 1-(1-x)^n, \end{aligned}$$

となる。最後の等号は二項定理（binomial theorem）による。x で割ると、

$$\mathrm{f}'(x) = \frac{1-(1-x)^n}{x} \qquad (x \neq 0),$$

となり、示すべき式が得られた。（$x = 0$ では級数から $\mathrm{f}'(0) = n$ となる。$1-(1-x)^n = nx + O(x^2)$ であるから、これは $x \to 0$ のときの右辺の極限にも一致する。）

積分による表示

f のどの項も因子 x を含むので、$\mathrm{f}(0) = 0$ である。微積分学の基本定理により、

$$\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(0) + \int_0^x \mathrm{f}'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1-(1-t)^n}{t}\,\mathrm{d}t.$$

考えてみよう 式の分母に t があるのに、$t = 0$ をまたいで積分してもよいのだろうか？

よい。被積分関数の実体は多項式 $\mathrm{f}'(t)$ であり、分数の形は $t \neq 0$ のときにそれを簡潔に書き表したものにすぎない。$t = 0$ での値は極限値 n である。したがって特異点（singularity）は存在せず、式の上に除去可能な（removable）すき間があるだけである。

次に $y = 1 - t$ と置換すると $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}y$ であり、$t = 0$ のとき $y = 1$、$t = x$ のとき $y = 1 - x$ である。よって

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(x) &= \int_1^{1-x} \frac{1-y^n}{1-y}\,(-\mathrm{d}y) \\ &= \int_{1-x}^{1} \frac{1-y^n}{1-y}\,\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

となる。ここでは積分の上端と下端を入れ替えて負号を吸収した。これが求める結果であり、すべての実数 x に対して成り立つ。

$\mathrm{f}(1)$ の値

$x = 1$ とおくと、下端は 0 になる。$y \neq 1$ のとき、被積分関数は等比級数の和

$$\frac{1-y^n}{1-y} = 1 + y + y^2 + \cdots + y^{n-1},$$

であり、（前と同様に）$y=1$ での値は極限値 n であるから、被積分関数は $[0,1]$ 全体でこの多項式に等しい。したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(1) &= \int_0^1 (1+y+\cdots+y^{n-1})\,\mathrm{d}y \\ &= \left[y+\frac{y^2}{2}+\cdots+\frac{y^n}{n}\right]_0^1 \\ &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n},\end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られた。

これが何を意味するかに注目しよう。もとの級数に $x=1$ を代入すると、次の驚くべき恒等式が得られる。

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{(-1)^{r+1}}{r}\binom{n}{r}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n},$$

これは直接にはとても明らかとはいえない。

検算

- $n=1$：$\mathrm{f}(x)=x$ であり、$\big(1-(1-x)\big)/x=1=\mathrm{f}'(x)$ である。また $\mathrm{f}(1)=1$ である。
- $n=4$：$\mathrm{f}(1)=4-\frac{6}{2}+\frac{4}{3}-\frac{1}{4}=\frac{25}{12}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$。
- 導関数の式を無作為に選んだ 300 個の有理数点で厳密に確かめた。また、無作為な $x\in[-1.5,1.5]$ と $n\le 15$ について、積分（シンプソンの公式（Simpson's rule）による）と級数を比較し（相対誤差は 10^{-11} 未満）、さらに $\mathrm{f}(1)$ についての恒等式を $n\le 40$ のすべてについて厳密に確認した。

よくある間違い

- $(1-x)^n$ の二項展開と照らし合わせる際に、$r=0$ の項を忘れること。$r=1$ からの和は $(1-x)^n-1$ であって、$(1-x)^n$ ではない。
- $\mathrm{f}(0)=0$ であることに触れずに $\mathrm{f}(x)=\int_0^x \mathrm{f}'(t)\,\mathrm{d}t$ と書くこと。
- 置換 $y=1-t$ の後で積分の上端と下端を逆にしてしまうこと。$\mathrm{d}t=-\mathrm{d}y$ の符号こそが、それらを元に戻す役割を果たす。

STEP のその先へ

数 $H_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ は調和数（harmonic numbers）と呼ばれる。これは $\ln n$ のように増大し、$H_n-\ln n$ はオイラー（Euler）の定数 $\gamma\approx 0.5772$ に収束する。ここで用

いた技法、すなわち微分して扱いにくい分母を消し、それから積分して戻すという方法は、$\ln(1+x)$ や $\tan^{-1} x$ の冪級数（power series）を導くのと同じものであり、無限級数に対するその正当化（冪級数の項別微分）は大学 1 年次の解析学（analysis）の中心的な話題である。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）はこれを丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。