解答例

STEP I 1995、第 4 問

純粋数学 ・ ド・モアブルの定理

> **STEP I 1995、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q4

鍵となる考え方

ド・モアブルの定理（de Moivre's theorem）により、$\sin 5\theta$ は $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^5$ の虚部（imaginary part）として表され、二項定理（binomial theorem）によってこの累乗は $\cos\theta$ と $\sin\theta$ の積に展開される。虚部のどの項にも $\sin\theta$ の奇数乗が含まれるので、因数を一つくくり出し、残りを $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ によって余弦に書き換えることができる。そして角 $\frac{1}{5}\pi$ が特別なのは、そこで $\sin 5\theta = 0$ となるからであり、その結果 $\cos^2\theta$ についての二次方程式（quadratic）が残る。

解答

恒等式

$c = \cos\theta$、$s = \sin\theta$ とおく。ド・モアブルの定理により、

$$\cos 5\theta + \mathrm{i}\sin 5\theta = (c + \mathrm{i}s)^5.$$

二項定理により、係数 $1, 5, 10, 10, 5, 1$ を用いて

$$(c + \mathrm{i}s)^5 = c^5 + 5c^4(\mathrm{i}s) + 10c^3(\mathrm{i}s)^2 + 10c^2(\mathrm{i}s)^3 + 5c(\mathrm{i}s)^4 + (\mathrm{i}s)^5.$$

$\mathrm{i}^2 = -1$、$\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$、$\mathrm{i}^4 = 1$、$\mathrm{i}^5 = \mathrm{i}$ であるから、虚数の項は $\mathrm{i}s$ の奇数乗を含む項である：

$$\mathrm{Im}(c + \mathrm{i}s)^5 = 5c^4 s - 10c^2 s^3 + s^5.$$

c と s はともに実数なので、虚部を比較すると

$$\begin{aligned}\sin 5\theta &= s\left(5c^4 - 10c^2s^2 + s^4\right)\\ &= s\left(5c^4 - 10c^2(1-c^2) + (1-c^2)^2\right)\\ &= s\left(5c^4 - 10c^2 + 10c^4 + 1 - 2c^2 + c^4\right)\\ &= s\left(16c^4 - 12c^2 + 1\right),\end{aligned}$$

を得る。ただし 2 行目で $s^2 = 1 - c^2$ を用いた。すなわち

$$\sin 5\theta = \sin\theta\left(16\cos^4\theta - 12\cos^2\theta + 1\right),$$

となり、示すべき式が得られた。

$\cos^2\frac{1}{5}\pi$ の値を求める

$\theta = \frac{1}{5}\pi$ とおく。このとき $\sin 5\theta = \sin\pi = 0$ であり、一方 $\sin\frac{1}{5}\pi \neq 0$ である（$0 < \frac{1}{5}\pi < \pi$ だから）。よって恒等式の両辺を $\sin\theta$ で割ることができ、$x = \cos^2\frac{1}{5}\pi$ は

$$16x^2 - 12x + 1 = 0, \qquad \text{よって} \qquad x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 64}}{32} = \frac{12 \pm 4\sqrt{5}}{32} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{8}.$$

を満たす。

考えてみよう この二次方程式には解が二つある。$\cos^2\frac{1}{5}\pi$ はどちらだろうか。

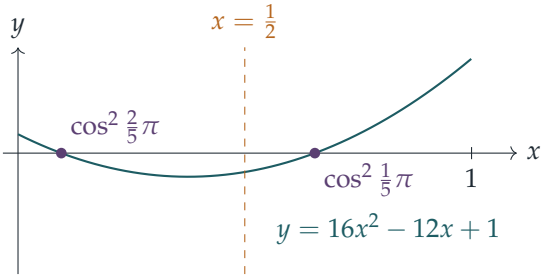
解を選ぶには、$\cos\frac{1}{5}\pi$ についての事実がもう一つ必要である。$0 < \frac{1}{5}\pi < \frac{1}{4}\pi$ であり、cos は $[0, \frac{1}{2}\pi]$ で減少するから、$\cos\frac{1}{5}\pi > \cos\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ であり、したがって

$$\cos^2\tfrac{1}{5}\pi > \tfrac{1}{2}.$$

ここで $\sqrt{5} < 3$ より $\frac{3-\sqrt{5}}{8} < \frac{3}{8} < \frac{1}{2}$ であり、一方 $\sqrt{5} > 1$ より $\frac{3+\sqrt{5}}{8} > \frac{1}{2}$ である。$\frac{1}{2}$ より大きい解はちょうど一つなので、

$$\cos^2\tfrac{1}{5}\pi = \frac{3+\sqrt{5}}{8}.$$

（もう一方の解は見かけ上の解（spurious root）ではない。$\theta = \frac{2}{5}\pi$ でも $\sin 5\theta = 0$ かつ $\sin\theta \neq 0$ であり、$\cos^2\frac{2}{5}\pi = \frac{3-\sqrt{5}}{8}$ となる。）



$\cos\frac{1}{5}\pi$ を導く

$0 < \frac{1}{5}\pi < \frac{1}{2}\pi$ より $\cos\frac{1}{5}\pi > 0$ であるから、正の平方根をとって

$$\cos\tfrac{1}{5}\pi = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}} = \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4}.$$

最後に、$(1+\sqrt{5})^2 = 1+2\sqrt{5}+5 = 6+2\sqrt{5}$ かつ $1+\sqrt{5} > 0$ であるから $\sqrt{6+2\sqrt{5}} = 1+\sqrt{5}$ となり、

$$\cos\tfrac{1}{5}\pi = \tfrac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}\right),$$

となって、示すべき式が得られた。

検算

- $\theta = \frac{1}{2}\pi$ のとき、恒等式は $\sin\frac{5}{2}\pi = 1\cdot(0-0+1) = 1$ を与え、これは正しい。θ が小さいとき、括弧内は $16-12+1 = 5$ に近づくので、両辺はともにおよそ 5θ となる。
- 数値的には $\cos 36^\circ \approx 0.809017$、$\frac{1}{4}(1+\sqrt{5}) \approx 0.809017$ であり、また $\cos^2 36^\circ \approx 0.654508 = \frac{3+\sqrt{5}}{8}$ である。さらに、10^4 個の無作為な角で恒等式を確かめた。
- $\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$ は黄金比（golden ratio）φ の半分である。黄金比は正五角形の対角線と辺の長さの比であり、36° という角からもそれが示唆される。

よくある間違い

- i の累乗から生じる符号を忘れること。s^3 の項には $\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$ がつくので、$-10c^2s^3$ となる。
- 根拠なしに二次方程式の解を選ぶこと。$\frac{3-\sqrt{5}}{8}$ を除外するには、$\cos^2\frac{1}{5}\pi > \frac{1}{2}$ のような不等式が必要である。
- $\sin\frac{1}{5}\pi \neq 0$ に触れずに $\sin\theta$ で割ること。

STEP のその先へ

同じ方法で、$\sin n\theta / \sin\theta$ や $\cos n\theta$ を $\cos\theta$ の多項式として表すことができる。これがチェビシェフ多項式（Chebyshev polynomials）であり、数値解析のあらゆる場面に現れる。数 $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}k/5}$ は 1 の 5 乗根（fifth roots of unity）であり、$\cos\frac{1}{5}\pi$ が平方根だけで表されるという事実こそ、正五角形が定規とコンパスで作図できる理由である。どの正多角形が作図可能かについてのガウス（Gauss）の定理は、大学で学ぶガロア理論

（Galois theory）の白眉の一つである。ド・モアブルの定理の背後にある幾何については、Needham の *Visual Complex Analysis*（複素解析を視覚的に解説した書）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。