解答例

STEP I 1995、第 3 問

純粋数学 ・ 望遠鏡型級数

> **STEP I 1995、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q3

鍵となる考え方

和の連続する項が大部分を共有しているとき、各項を差 $f(r)-f(r-1)$ の形に書くと、ほとんどすべてが打ち消し合う。すなわち、和が**望遠鏡的に縮む**（telescopes）のである。工夫すべきは、その差が求めたい項になるように f を選ぶところにあるが、この問題ではそれが与えられている。交代級数（alternating series）については、これを**すべての**立方数の和から偶数の立方数の和の 2 倍を引いたものとして書くのがこつであり、そうすれば小問 (ii) の結果を 2 回使うだけで済む。

解答

小問 (i)

和をすべて書き出すと

$$\sum_{r=1}^{n}\{f(r)-f(r-1)\}=\{f(1)-f(0)\}+\{f(2)-f(1)\}+\cdots+\{f(n)-f(n-1)\}.$$

$f(1),f(2),\ldots,f(n-1)$ はそれぞれ正の符号で 1 回、負の符号で 1 回現れるので、すべて打ち消し合う。残るのは最初の括弧の $-f(0)$ と最後の括弧の $f(n)$ だけであり、$f(n)-f(0)$ が得られる。これが示すべきことであった。

「すべて打ち消し合う」よりも厳密な議論が欲しければ、n に関する数学的帰納法（induction）を用いればよい。$n=1$ のとき、和は $f(1)-f(0)$ である。$n=k$ で結果が成り立つと仮定すると、次の項を加えて

$$f(k)-f(0)+f(k+1)-f(k)=f(k+1)-f(0),$$

となり、これは $n = k+1$ のときの結果である。よって、すべての $n \geq 1$ について成り立つ。

小問 (ii)

$f(r) = r^2(r+1)^2$ とすると $f(r-1) = (r-1)^2r^2$ である。どちらも因数 r^2 を含むので、これをくくり出し、2乗の差の因数分解（difference of two squares）を用いると

$$\begin{aligned} f(r) - f(r-1) &= r^2[(r+1)^2 - (r-1)^2] \\ &= r^2[(r+1)+(r-1)][(r+1)-(r-1)] \\ &= r^2 \cdot 2r \cdot 2 = 4r^3. \end{aligned}$$

ここで $r = 1$ から n まで和をとり、小問 (i) を適用する。$f(0) = 0$ であるから

$$4\sum_{r=1}^{n} r^3 = f(n) - f(0) = n^2(n+1)^2, \qquad \text{よって} \qquad \boxed{\sum_{r=1}^{n} r^3 = \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2.}$$

小問 (iii)

この級数は $2n+1$ 個の項からなる。奇数の立方は正の符号、偶数の立方は負の符号をもち、最後は奇数の立方 $(2n+1)^3$ で終わる。

> **考えてみよう** $\sum r^3$ の公式だけを使って、交互に変わる符号をどう扱えばよいか。

$(2n+1)^3$ までの**すべての**立方数の和から出発する。この和では偶数の立方がすべて正の符号をもっているが、求めたいのは負の符号なので、偶数の立方をそれぞれ2回ずつ引けばよい。

$$1^3 - 2^3 + 3^3 - \cdots + (2n+1)^3 = \sum_{k=1}^{2n+1} k^3 - 2\sum_{m=1}^{n} (2m)^3.$$

偶数の立方は $m = 1, \ldots, n$ に対する $(2m)^3 = 8m^3$ であり、最大のものは $(2n)^3$ である。小問 (ii) を2回（うち1回は n の代わりに $2n+1$ として）用いると

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n+1} k^3 - 16\sum_{m=1}^{n} m^3 &= \tfrac{1}{4}(2n+1)^2(2n+2)^2 - 16 \cdot \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2 \\ &= (2n+1)^2(n+1)^2 - 4n^2(n+1)^2 \\ &= (n+1)^2[(2n+1)^2 - (2n)^2] \\ &= (n+1)^2(4n+1), \end{aligned}$$

ここで、2 行目では $(2n+2)^2 = 4(n+1)^2$ を、最後の行では 2 乗の差 $(2n+1)^2 - (2n)^2 = (2n+1+2n)\cdot 1$ を用いた。よって

$$\boxed{1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \cdots + (2n+1)^3 = (n+1)^2(4n+1).}$$

検算

- $n = 0$ のとき、級数は $1^3 = 1$ だけであり、$(0+1)^2(0+1) = 1$ である。
- $n = 1$ のとき：$1 - 8 + 27 = 20$ であり、$2^2 \times 5 = 20$ である。
- $n = 2$ のとき：$1 - 8 + 27 - 64 + 125 = 81$ であり、$3^2 \times 9 = 81$ である。
- 項は $(2m+1)^3 - (2m)^3 \approx 12m^2$ のように対になるので、答えは $(2n+1)^3/2$ 程度、すなわち最後の項のおよそ半分のように増加するはずである。実際 $(n+1)^2(4n+1) \approx 4n^3$ であり、$\sum 12m^2 \approx 4n^3$ と一致する。

また、0 から 199 までのすべての n について、小問 (ii) と (iii) を直接和をとって確かめた。

よくある間違い

- 偶数の立方を 1 回だけ引いてしまうこと。これでは $\sum k^3 - \sum(2m)^3$、すなわち**奇数の**立方の和となり、交代和にはならない。
- 偶数の立方を $(2n+2)^3$ までとってしまったり、すべての立方の和の公式で $2n+1$ の代わりに n を用いてしまったりすること。項の個数を注意深く数えること。

STEP のその先へ

小問 (i) は微分積分学の基本定理（fundamental theorem of calculus）の離散版である。差 $\mathrm{f}(r) - \mathrm{f}(r-1)$ が導関数の役割を果たし、それを足し合わせると f が復元される。これは F' を積分すると $F(b) - F(a)$ が得られるのとちょうど同じである。この「差分法（calculus of finite differences）」を用いると、適切な f を見つけることで任意の多項式の和を求めることができ、同じ望遠鏡和の考え方は級数の収束に関する多くの証明の土台にもなっている。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には、望遠鏡和やこの種の級数の演習がさらに収録されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。