解答例

STEP I 1995、第 2 問

純粋数学 • 置換積分

> **STEP I 1995、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q2

鍵となる考え方

小問 (i) では、どちらの積分も単独では易しくないが、2 つを組にするとみごとにうまくいく。和をとると約分して 1 になる分数が現れ、差をとると分子（numerator）がちょうど分母（denominator）の導関数（derivative）になる。易しい積分が 2 つ得られれば、S と T についての連立方程式（simultaneous equations）が 2 本得られる。小問 (ii) で置換（substitution）$x = \sin^2 t$ を選ぶのは、これによって $\frac{1}{x} - 1$ が完全平方（perfect square）$\cot^2 t$ になり、平方根が消えるからである。その後は最後まで倍角の公式（double-angle formulae）を使うだけである。

解答

小問 (i)

被積関数（integrand）どうしを足すと、

$$S + T = \int \frac{\cos x + \sin x}{\cos x + \sin x}\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x = x + c_1.$$

引くと、

$$S - T = \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\,\mathrm{d}x.$$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x + \sin x) = -\sin x + \cos x$ であるから、分子は分母の導関数である。したがってこれは $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$ の形であり、

$$S - T = \ln|\cos x + \sin x| + c_2.$$

この2式の和と差をとって2で割ると、

$$S = \tfrac{1}{2}(x + \ln|\cos x + \sin x|) + C,$$
$$T = \tfrac{1}{2}(x - \ln|\cos x + \sin x|) + C',$$

ここで C と C' は任意定数（arbitrary constants）である。これらは、被積関数が定義される $\cos x + \sin x \neq 0$ を満たす任意の区間で成り立つ。

小問 (ii)

求める積分を I とおく。$x = \sin^2 t$ とすると $\mathrm{d}x = 2\sin t \cos t \,\mathrm{d}t$ である。積分区間については、$x = \frac{1}{4}$ のとき $\sin t = \frac{1}{2}$ より $t = \frac{\pi}{6}$、$x = \frac{1}{2}$ のとき $\sin t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ より $t = \frac{\pi}{4}$ である。（t は $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ の範囲にとる。t がこの区間を動くとき、x は $\frac{1}{4}$ から $\frac{1}{2}$ まで増加する。）

次に平方根を処理する。

$$\frac{1}{x} - 1 = \frac{1 - \sin^2 t}{\sin^2 t} = \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}, \qquad \text{よって} \qquad \sqrt{\frac{1}{x} - 1} = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

? **考えてみよう** 平方根が $|\cos t / \sin t|$ ではなく $\cos t / \sin t$ になるのはなぜか。

一般には $\sqrt{\cot^2 t} = |\cot t|$ である。しかし $\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{4}$ では $\sin t$ と $\cos t$ はともに正であるから $\cot t > 0$ となり、絶対値（modulus）を外してよい。t を第1象限（first quadrant）にとったのはこのためである。

代入すると $\sin t$ が約分される。

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/4} (1 - 4\sin^2 t)\, \frac{\cos t}{\sin t}\, 2\sin t \cos t \,\mathrm{d}t = \int_{\pi/6}^{\pi/4} 2\cos^2 t\,(1 - 4\sin^2 t)\,\mathrm{d}t.$$

ここで倍角の公式を用いて、積分しやすい形にする。$2\cos^2 t = 1 + \cos 2t$ および $8\sin^2 t \cos^2 t = 2\sin^2 2t = 1 - \cos 4t$ であるから、

$$2\cos^2 t - 8\sin^2 t \cos^2 t = (1 + \cos 2t) - (1 - \cos 4t) = \cos 2t + \cos 4t.$$

したがって

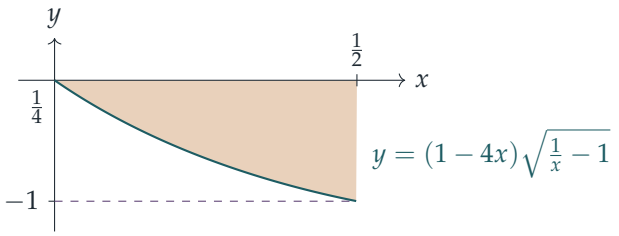
$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/6}^{\pi/4} (\cos 2t + \cos 4t)\,\mathrm{d}t = \left[\tfrac{1}{2}\sin 2t + \tfrac{1}{4}\sin 4t\right]_{\pi/6}^{\pi/4} \\ &= \left(\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{1}{4}\sin\pi\right) - \left(\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{\pi}{3} + \tfrac{1}{4}\sin\tfrac{2\pi}{3}\right) \\ &= \tfrac{1}{2} - \left(\tfrac{\sqrt{3}}{4} + \tfrac{\sqrt{3}}{8}\right), \end{aligned}$$

ゆえに

$$\int_{1/4}^{1/2} (1 - 4x)\sqrt{\frac{1}{x} - 1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{4 - 3\sqrt{3}}{8}.$$

検算

- 符号：$(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ では $1-4x<0$ であり平方根は正であるから、被積関数は負であり、I は負でなければならない。実際 $4-3\sqrt{3}\approx -1.196$ であるから $I\approx -0.1495$ である。下のグラフは被積関数を表している。
- もとの積分に直接シンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると $-0.149519\ldots$ となり、$\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{8}$ と小数第 10 位まで一致する。
- 小問 (i) については微分して確かめる：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{2}\big(x+\ln(\cos x+\sin x)\big) = \frac{1}{2}\Big(1+\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\Big) = \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}$。たとえば $[0,1]$ 上では、S と T はいずれも数値積分（quadrature）の値（0.66168 と 0.33832）と一致する。



よくある間違い

- 積分区間を $t=\frac{\pi}{6}$ と $t=\frac{\pi}{4}$ に変え忘れる、あるいは x に戻すときに誤る。
- $\mathrm{d}x$ の因子 $2\sin t\cos t$ を落とす、あるいは $\mathrm{d}x=2\sin t\,\mathrm{d}t$ と書いてしまう。
- 正の答えを出す：被積関数はつねに負であるから、正の値が出たら符号の誤りを疑うべきである。

STEP のその先へ

小問 (i) の技法、すなわち扱いにくい積分に「相棒」を組み合わせて和と差をどちらも易しくする方法は、何度も繰り返し現れる。たとえば $\int \mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x$ と $\int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x$ がそうであり、その複素数版は $\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}$ を積分することで得られる。小問 (ii) は一般的な原理の小さな例である。うまく選んだ置換によって、代数的な被積関数を三角多項式（trigonometric polynomial）に変えることができ、これはフーリエ級数（Fourier series）の出発点である。この種の積分をさらに多く、丁寧な解説とともに学びたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。