解答例

STEP I 1995、第 12 問

確率・統計 ・ 並べ方と数え上げ

> **STEP I 1995、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q12

鍵となる考え方

n 人の生徒の並び方はどれも同様に確からしいので、各確率は条件を満たす並び方の数を $n!$ で割ったものである。さらによいことに、対称性により、ホッケー選手が**どの位置**を占めるかだけを考えればよい。r 個の位置の組としてありうる $\binom{n}{r}$ 通りは、どれも同様に確からしいのである。こうすると、各小問は位置の選び方を数える問題になる。最後の小問について、隙間に関するヒントは標準的な「星と棒（stars and bars）」の技法である。まずホッケー選手でない生徒を並べ、ホッケー選手はその間の互いに異なる隙間に入らなければならない。

解答

以下では一貫して、r 人のホッケー選手を H、それ以外の $n-r$ 人の生徒を N と呼ぶ。（互いに区別できる）生徒の $n!$ 通りの並べ方はすべて同様に確からしい。H の位置の組 r 個のどれも、同じ数 $r!\,(n-r)!$ 通りの並べ方から生じるので、H が占める位置の組は、ありうる $\binom{n}{r}$ 通りの組のどれになるのも同様に確からしい。以下では都合のよいほうの見方を用いる。

小問 (i)

まず両端の位置を埋める。左端の生徒がホッケー選手である確率は $\frac{r}{n}$ である。そのもとで、右端の生徒は残りの $n-1$ 人のうちの誰かであり、どの生徒も同様に確からしく、そのうち $r-1$ 人がホッケーをする。よって

$$\mathrm{P}(\text{両端にホッケー選手}) = \frac{r}{n}\cdot\frac{r-1}{n-1} = \frac{r(r-1)}{n(n-1)}.$$

（これが 0 でないためには $r \geq 2$ が必要であるが、これは問題文で保証されている。）

小問 (ii)

ホッケー選手全員が並んで立つのは、彼らの位置が連続する r か所のブロックをなすときであり、そのときに限る。そのようなブロックは位置 $1, 2, \ldots, n-r+1$ のいずれからも始められるので、$\binom{n}{r}$ 通りのうち条件を満たす位置の組は $n-r+1$ 通りある。

$$\mathrm{P}(\text{全員が隣り合う}) = \frac{n-r+1}{\binom{n}{r}} = \frac{r!\,(n-r+1)!}{n!}.$$

同じことであるが、r 人のホッケー選手をくっつけて 1 人の「超生徒」とみなしてもよい。$n-r+1$ 個の単位の並べ方が $(n-r+1)!$ 通り、ブロック内部の並べ方が $r!$ 通りあり、同じ答えが得られる。検算として、$r = n$ のときこれは 1 となり、当然そうなるべき値である。

小問 (iii)

まずホッケー選手でない $n-r$ 人を一列に並べる。すると $n-r+1$ 個の隙間ができる。先頭の前に 1 つ、隣り合う 2 人の間にそれぞれ 1 つ、最後尾の後ろに 1 つである。



どの 2 人のホッケー選手も隣り合わないのは、各隙間に入るホッケー選手が高々 1 人であるときであり、そのときに限る。（2 人の H が同じ隙間に入れば互いに隣り合い、異なる隙間に入れば少なくとも 1 人の N が間に入る。）したがって、条件を満たす並び方は、$n-r+1$ 個の隙間から r 個を選び、選んだ各隙間に 1 人ずつ入れることに対応する。

位置を数えよう。条件を満たす H の位置の組は、どの r 個の隙間を使うかで決まるので、$\binom{n-r+1}{r}$ 通りある。よって

$$\mathrm{P}(\text{どの 2 人も隣り合わない}) = \frac{\binom{n-r+1}{r}}{\binom{n}{r}} = \frac{(n-r+1)!\,(n-r)!}{(n-2r+1)!\,n!}.$$

（生徒の並べ方を直接数えても同じ結果になる。N の並べ方が $(n-r)!$ 通り、次に区別できる r 人の H を互いに異なる隙間に入れる方法が $(n-r+1)(n-r)\cdots(n-2r+2) = \frac{(n-r+1)!}{(n-2r+1)!}$ 通りであり、全体を $n!$ で割ればよい。）

考えてみよう ホッケー選手全員を引き離しておくことが不可能になるのはどんなときか？

互いに異なる隙間が r 個必要であるが、隙間は $n-r+1$ 個しかない。したがって次のようになる。

- $r \leq n-r+1$、すなわち $n \geq 2r-1$ ならば、確率は上で求めた o でない値である。
- $r > n-r+1$、すなわち $n \leq 2r-2$ ならば（彼らを引き離すにはホッケー選手でない生徒が少なすぎる）、確率は 0 である。

境界の場合 $n = 2r-1$ では並びは $HNHN\cdots NH$ という形に限られ、公式は $\frac{r!\,(r-1)!}{(2r-1)!} = 1\Big/\binom{2r-1}{r}$ を与える。これは、H がちょうどその 1 つおきの r か所に入る確率である。

検算

- $n = 10, r = 3$ とする。このとき (i) は $\frac{6}{90} = \frac{1}{15}$、(ii) は $\frac{8}{120} = \frac{1}{15}$、(iii) は $\binom{8}{3}\Big/\binom{10}{3} = \frac{56}{120} = \frac{7}{15}$ を与える。3 つとも、ありうる 120 通りの位置の組をコンピュータで数え上げた結果と一致する。また公式は、$2 \leq r \leq n \leq 14$ のすべての場合についてこの方法で確かめ（さらに $n \leq 7$ については $n!$ 通りの並べ方すべてと照合し）た。
- 2 人の場合 $r = 2$ には、小問 (ii) と (iii) は余事象の関係にある（2 人の選手は隣り合うか、隣り合わないかのどちらかである）。実際 $\frac{2}{n} + \frac{(n-1)(n-2)}{n(n-1)} = \frac{2}{n} + \frac{n-2}{n} = 1$ である。

よくある間違い

- 隙間を $n-r-1$ 個（ホッケー選手でない生徒どうしの真の間にあるものだけ）しか数えず、列の両端を忘れる。
- モデルを混同する。分子では H の位置の組を数えているのに、分母では生徒の並べ方全体（$n!$）を用いてしまう。どちらか一方の見方を選び、それを貫くこと。
- 答えが o でない条件を $n \geq 2r$ としてしまう。$n = 2r-1$ の場合（交互に並び、最初と最後が H）も成り立つ。

STEP のその先へ

隙間による議論は「星と棒」の考え方であり、数え上げ組合せ論（enumerative combinatorics）の主力となる道具である。同じ数 $\binom{n-r+1}{r}$ は「$\{1,\ldots,n\}$ の r 元部分集

合のうち、連続する 2 つの整数を含まないものはいくつあるか」という問いの答えでもあり、これを r について足し合わせるとフィボナッチ数（Fibonacci numbers）が得られる。人の並べ方を位置の組に置き換えるという手順は、対称性を利用して標本空間（sample space）を縮小する方法の最初の一例であり、大学の確率論で絶えず用いられる。Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）には、数え上げと確率の素朴な定義についての優れた章がある。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。