解答例

STEP I 1995、第 11 問

力学 ・ 円柱間の摩擦

> **STEP I 1995、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q11

鍵となる考え方

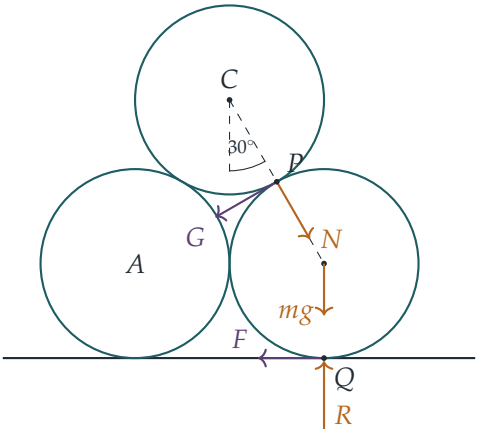
下にある円柱の一つに注目する。その重力と上の円柱からの垂直抗力（normal reaction）はどちらも中心を通るので、中心のまわりのモーメント（moment）を考えると、現れるのは二つの摩擦力（friction）だけであり、それらの大きさは等しくなければならない。次に水平方向の力の分解（resolving）を一回行えば、円柱どうしの接点における摩擦力と垂直抗力の比が決まり、あとは互いに接する三つの円の幾何（30° と 60° の角）がすべてを片づけてくれる。

解答

モデル

円柱は半径 r の一様な剛体（rigid body）の円柱とみなし、軸に垂直な断面で考える。すると各円柱は円となり、その重力は中心にはたらく。どの接点でも摩擦係数（coefficient of friction）は同じ μ とする。下の円柱を A（左）、B（右）、上の円柱を C とよぶ。A と B の中心は高さ r にあって互いに $2r$ 離れており、C の中心はそのそれぞれから $2r$ の距離にある。したがって中心を結ぶ三角形は正三角形であり、C の中心から B の中心へ向かう直線は鉛直方向と 30° をなす。

さしあたり、A と B は互いに力を及ぼし合わないと仮定する。この点には最後に立ち返る。対称性により、B と、C の右側の接点だけを調べれば十分である。



B にはたらく力は次のとおりである。

- 中心にはたらく重力 mg。
- 地面との接点 Q において、上向きの垂直抗力 R と、A の方へ水平に向かう摩擦力 F。
- C との接点 P において、中心を結ぶ直線に沿った垂直抗力 N（下向きかつ外向きで、鉛直方向と 30° をなす）と、共通接線に沿った摩擦力 G。後者は下向きかつ A の方へ、すなわち水平より 30° 下向きにはたらくものとする。

どちらかの摩擦力が実際には逆向きにはたらくなら、その値が負として求まるだけである。

B の中心のまわりのモーメント

重力は B の中心を通り、N も中心を通る。二つの円の間の垂直抗力は中心を結ぶ直線に沿ってはたらくからである。二つの摩擦力はどちらも接線に沿ってはたらき、中心からの垂直距離は r である。下端にあって A の方を向く F は、図において B を時計回りに回そうとし、P にあって接線に沿って A の方へ下向きにはたらく G は、反時計回りに回そうとする。したがって

$$Fr = Gr, \qquad \text{よって} \qquad F = G.$$

B についての水平方向の分解

N は外向きの水平成分 $N\sin 30° = \frac{1}{2}N$ をもつ。F と、G の水平成分 $G\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}G$ はどちらも内向きである。よって

$$\tfrac{1}{2}N = F + \tfrac{\sqrt{3}}{2}G = G\left(1 + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

したがって

$$\frac{G}{N} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2-\sqrt{3}.$$

これは正であるから、G は確かに仮定した向きにはたらき、$F = G$ も同様である。

接点 P で滑りが起こらないためには $G \leq \mu N$、すなわち

$$\mu \geq 2-\sqrt{3}.$$

が必要である。

地面との接点

地面との接点でこれ以上の摩擦が必要とならないことも確かめておかなければならない。C にとって、B から受ける力は、鉛直方向と 30° をなす左上向きの N と、水平方向と 30° をなして接線に沿って上向きにはたらく G である。これらの鉛直成分は $\frac{\sqrt{3}}{2}N$ と $\frac{1}{2}G$ であり、対称性により A からも同じ寄与がある。C について鉛直方向に分解すると、

$$2\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}N + \tfrac{1}{2}G\right) = mg \implies N(\sqrt{3}+2-\sqrt{3}) = mg \implies N = \tfrac{1}{2}mg.$$

系全体について鉛直方向に分解すると、全重量 $3mg$ は対称性により等しく分担されるので、$R = \frac{3}{2}mg$ である。すると

$$\frac{F}{R} = \frac{(2-\sqrt{3})\cdot\frac{1}{2}mg}{\frac{3}{2}mg} = \frac{2-\sqrt{3}}{3} < 2-\sqrt{3},$$

となり、$\mu \geq 2-\sqrt{3}$ であれば地面との接点も滑らない。決定的なのは円柱どうしの接点である。

考えてみよう A と B は接している。両者の間の力を無視してよいのはなぜか。

両者は互いを押し離すことしかできないので、A が中心を結ぶ直線に沿って大きさ $S \geq 0$ の力で B を外向きに押すとする。この力は B の中心を通るので、モーメントの式からはやはり $F = G$ が得られるが、水平方向の分解は $\frac{1}{2}N + S = G\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ となる。一方、C についての鉛直方向の式はそのまま成り立ち、この二つを連立して解くと、G/N は S が増加すると増加することがわかる（$S = 0$ のとき $2-\sqrt{3}$ である）。S は方程式から定まらないので、この問題は不静定（statically indeterminate）であり、必要な摩擦が最小になるのは $S = 0$ のときである。よって摩擦係数の最小値は、求めるとおり $2-\sqrt{3}$ である。

検算

- $2 - \sqrt{3} = \tan 15^\circ \approx 0.268$ である。つまり円柱どうしの接点で、合力は法線とちょうど 15° をなし、これは図形に現れる 30° の角のちょうど半分である。計算が正しいことを示す心地よい兆候である。
- 地面での比 $(2 - \sqrt{3})/3 \approx 0.089$ は円柱どうしの比の 3 分の 1 であり、これは納得がいく。地面は $\frac{3}{2}mg$、すなわち N の 3 倍を支えるが、摩擦力の大きさは同じだからである。
- B と C についての力とモーメントのすべての式に数値を代入し、未知の押す力 $S \geq 0$ について最小化する数値計算を行ったところ、μ の最小値は 0.267949… となり、$2 - \sqrt{3}$ と一致した。

よくある間違い

- 中心ではなく、地面との接点や P のまわりのモーメントを考えること。これでも解けるが、N が式に入ってきて計算が煩雑になる。中心を選べば mg と N を一度に消せる。
- 地面だけを調べること。地面との接点に必要な摩擦ははるかに小さいので、誤った臨界値が得られてしまう。
- C について鉛直方向に分解するとき、ニュートン（Newton）の第三法則により C にはたらく摩擦が接線に沿って**上向き**にはたらくことを忘れること。

STEP のその先へ

下の円柱どうしの間の力 S は、釣り合い（equilibrium）の式からは求められない。この構造は**不静定**であり、問題が S のあらゆる可能な値にわたる摩擦の最小値を問うているのは理にかなっている。工学では、このような系は弾性変形をモデル化することで決着がつけられ、同じ問題は積み重ねたパイプや砂山のような粒状物質の力学にも現れる。静力学、摩擦、剛体の釣り合いについての丁寧な解説としては、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。