解答例

STEP I 1995、第 10 問

力学 ・ 弾性ひもと跳ね返り

STEP I 1995、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/95-s1-q10

鍵となる考え方

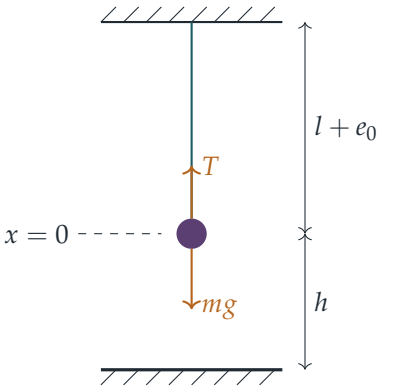
平衡位置（equilibrium position）から測ると、重力と張力（tension）のうち平衡に対応する部分とがちょうど打ち消し合う。そのため、つり合っていない力は変位 x に比例するフックの法則（Hooke's law）による復元力だけになる。ここから単振動（simple harmonic motion）が導かれ、そのエネルギー方程式がそのまま速さの公式となる。その後は帳簿付けにすぎない。エネルギー方程式によって $x = 0$ と面の間を行き来する玉の運動を追い、各衝突ではニュートンの反発の法則（Newton's experimental law）によって速度の向きを反転させ、大きさを定数倍すればよい。

解答

玉を質点とみなし、ひもは軽く弾性的で、伸びている間はフックの法則に従うものとする。空気抵抗は無視し、衝突は瞬間的に起こるものとする。以下では一貫して

$$\omega^2 = \frac{\lambda}{lm}.$$

と書く。



平衡状態での長さ

平衡状態での伸びを e_0 とすると、張力は $T_0 = \lambda e_0 / l$ である。平衡状態にある玉について鉛直方向の力のつり合いを考えると $T_0 = mg$ であるから、

$$\frac{\lambda e_0}{l} = mg \quad \Longrightarrow \quad e_0 = \frac{mgl}{\lambda},$$

となり、全長は $l + e_0 = l(1 + mg/\lambda)$ である。これが示すべきことであった。

速さの公式

x を平衡位置から下向きに測った玉の位置（下向きを正）とする。$x \geq 0$ では伸びは $e_0 + x > 0$ であるから、ひもは張っており、張力は $\lambda(e_0 + x)/l$ である。下向きにニュートンの運動の第二法則を適用すると

$$m\ddot{x} = mg - \frac{\lambda(e_0 + x)}{l} = -\frac{\lambda x}{l},$$

となる。$\lambda e_0 / l = mg$ だからである。よって $\ddot{x} = -\omega^2 x$ であり、これは $x = 0$ を中心とする単振動である。

$\ddot{x} = v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ と書いて積分すると、

$$\int v\,\mathrm{d}v = -\omega^2 \int x\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad v^2 = -\omega^2 x^2 + C.$$

$x = 0$ で速さは u_0 であるから $C = u_0^2$ となり、

$$v^2 + \frac{\lambda}{lm}x^2 = u_0^2,$$

が得られる。これが示すべきことであった。（同じことであるが、これはエネルギー保存則にほかならない。重力による位置エネルギーと弾性エネルギーを合わせると、$\frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda}{l}x^2$ に定数を加えたものになる。）

1 回目の衝突

玉が面に達するのは、$x = h$ で $v^2 > 0$、すなわち $u_0^2 - \omega^2 h^2 > 0$ となるときに限る。これはまさに与えられた条件 $\lambda h^2 < lmu_0^2$ である。よって玉は速さ w_0 で面に衝突する。ここで

$$w_0^2 = u_0^2 - \omega^2 h^2.$$

である。ニュートンの反発の法則により、玉は速さ ew_0 で上向きに面を離れる。

$x = h$ から $x = 0$ へ上昇する間もひもは伸びたままなので、同じ運動方程式が成り立ち、エネルギー積分は $v^2 + \omega^2 x^2 =$ 定数 である。変わるのは定数だけである。$x = h$ では $v^2 = e^2 w_0^2$ であるから、定数は $e^2 w_0^2 + \omega^2 h^2$ となり、$x = 0$ において

$$\begin{aligned} u_1^2 &= e^2 w_0^2 + \omega^2 h^2 \\ &= e^2 \left(u_0^2 - \omega^2 h^2 \right) + \omega^2 h^2 \\ &= e^2 u_0^2 + \frac{\lambda}{lm} h^2 \left(1 - e^2 \right), \end{aligned}$$

が得られる。これが示すべきことであった。ここで u_1 は上向きである。

2 回目の衝突

考えてみよう $x = 0$ を通過した後、玉は平衡位置より上に上がり、ひもがたるむかもしれない。それでも玉は速さ u_1 で $x = 0$ に戻ってくるだろうか。

戻ってくる。$x = 0$ より上では、玉は重力とひもの張力の作用を受けて、あるいはひもがたるんでいれば重力だけの作用を受けて運動する。どちらの力も保存力（conservative force）である。ひもがたるんでいるときは、その弾性エネルギーが単に 0 になるだけである。したがって、$x = 0$ より上を運動している間はずっと、力学的エネルギー（mechanical energy）の総和が保存される。玉が $x = 0$ まで下りてきたとき、その位置エネルギーは出発したときと同じであるから、速さも同じ u_1 であり、向きは今度は下向きである。

よって 2 回目の下降は、u_0 を u_1 に置き換えれば 1 回目とまったく同じである。玉が面に達することも確かめる必要があるが、

$$u_1^2 - \omega^2 h^2 = e^2 \left(u_0^2 - \omega^2 h^2 \right) > 0.$$

であるから、確かに達する。1 回目の衝突の議論を u_0 を u_1 に置き換えて繰り返すと、

$$\begin{aligned} u_2^2 &= e^2 u_1^2 + \omega^2 h^2 \left(1 - e^2\right) \\ &= e^2 \left[e^2 u_0^2 + \omega^2 h^2 (1 - e^2)\right] + \omega^2 h^2 (1 - e^2) \\ &= e^4 u_0^2 + \omega^2 h^2 (1 - e^2)(1 + e^2) \\ &= e^4 u_0^2 + \frac{\lambda}{lm} h^2 \left(1 - e^4\right), \end{aligned}$$

となり、これで問題は解決した。

検算

- $e = 1$ ならばエネルギーの損失はなく、どちらの公式からも $u_1 = u_2 = u_0$ が得られる。当然そうなるべきである。
- $e = 0$ ならば玉は静止した状態で面を離れ、$u_1^2 = \omega^2 h^2$ となる。玉は振幅 h の位置で静止状態から上昇し、中心を速さ ωh で通過する。これは単振動から予想されるとおりである。
- 規則性を見るうまい方法がある。各衝突で衝突時の速さの 2 乗が e^2 倍されるので、$u_n^2 - \omega^2 h^2 = e^{2n} \left(u_0^2 - \omega^2 h^2\right)$ となる。
- 運動を数値的に追跡した（ルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta）を用い、ひもがたるむことも許した）。たとえば $m = 1, l = 1, \lambda = 20, g = 9.8, u_0 = 6, h = 0.3, e = 0.9$ とすると、シミュレーションから $u_1 = 5.4316$ と $u_2 = 4.9233$ が得られ、公式と一致する。この例では、衝突と衝突の間に実際にひもがたるむ。

よくある間違い

- x を平衡位置からではなく自然長（natural length）の位置から測ってしまう。すると重力が打ち消されず、公式に余分な 1 次の項が現れる。
- 反発係数 e を、$x = h$ での衝突時の速さではなく $x = 0$ での速さに掛けてしまう。
- 平衡位置より上でもひもが張ったままだと仮定してしまう。そうなるとは限らないが、エネルギー保存則があるので、$x = 0$ での速さにはこのことは関係しない。

STEP のその先へ

平衡点のまわりで重力が打ち消されることは、一般的な原理の最初の例である。すなわち、平衡点のまわりで線形化（linearise）すると、微小振動は単振動となり、ω^2 は「剛

性」を質量で割ったものに等しい。跳ねる玉は、区分的に滑らか（piecewise-smooth）な振動子、すなわち**衝突**振動子（impact oscillator）の一例である。こうした系は、面そのものが動いている場合には、驚くほど豊かな振る舞い（周期倍分岐（period doubling）、さらにはカオス（chaos））を示しうる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、振動子とエネルギーを用いた方法が大学 1 年次の水準で扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。