解答例

STEP I 1995、第 1 問

純粋数学 • 多項式の不等式

> **STEP I 1995、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q1

鍵となる考え方

小問 (i) は、項をまとめることで因数分解（factorise）できる三次式（cubic）である。いったん三つの一次因数の積になれば、その符号は数直線（number line）から読み取れる。小問 (ii) は同じ三次式が姿を変えたものである。すべての項の次数の合計が 3 なので、y^3 で割ると、変数 x/y についての小問 (i) の三次式になる。すると同じ因数分解から原点を通る三本の直線が得られ、小問 (iii) は直線に沿ってではなく原点のまわりに描く符号表（sign chart）となる。

解答

小問 (i)

項を二つずつまとめると、

$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 - x + 4 &= x^2(x-4) - (x-4) \\ &= (x-4)(x^2-1) \\ &= (x+1)(x-1)(x-4). \end{aligned}$$

根は -1、1、4 である。各因数は一次式であり、自分自身の根でのみ符号が変わるので、積は三つの根のそれぞれで符号が変わる。x が十分大きな正の数のとき三つの因数はすべて正であるから、右から読んでいくと符号の様子は次のようになる。

x	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$1 < x < 4$	$x > 4$
符号	$-$	$+$	$-$	$+$

三次式が零となる根も含めると、不等式が成り立つのはちょうど

$$-1 \le x \le 1 \quad \text{または} \quad x \ge 4.$$

のときである。

小問 (ii)

$f(x,y) = x^3 - 4x^2y - xy^2 + 4y^3$ とおく。これは小問 (i) の三次式の各項に y のべきを掛けて次数を 3 にそろえたものであり、同じまとめ方が使える。

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2(x-4y) - y^2(x-4y) \\ &= (x-4y)(x-y)(x+y). \end{aligned}$$

積が零になるのは、いずれかの因数が零になるときに限るので、$f(x,y) = 0$ となるのは三本の直線

$$x = 4y \ (\text{すなわち} y = \tfrac{1}{4}x), \qquad y = x, \qquad y = -x,$$

の上であり、これらはすべて原点を通る。

> **考えてみよう** なぜ (ii) の答えが (i) と関係するはずなのだろうか。

$y \neq 0$ のとき、$t = x/y$ とおく。すると $f(x,y) = y^3\,(t^3 - 4t^2 - t + 4)$ となり、これは小問 (i) の三次式の y^3 倍である。この三次式は $t = -1, 1, 4$ で零になる。すなわち $x = -y$、$x = y$、$x = 4y$ の上で零になる。（$y = 0$ のときは $f = x^3$ であり、これが零になるのは原点のみで、原点はすでに三本の直線すべての上にある。）

小問 (iii)

三本の直線は平面を、原点で接する六つの扇形（sector）に分ける。x 軸の正の向きから反時計回りに測ると、六本の半直線の向きは

$$\arctan\tfrac{1}{4} \approx 14^\circ, \quad 45^\circ, \quad 135^\circ, \quad 194^\circ, \quad 225^\circ, \quad 315^\circ.$$

である。扇形の内部では f のどの因数も零にならないので、そこでの f の符号は一定である。直線を一本横切ると、ちょうど一つの因数の符号が変わる（三本の直線は互いに異なり、原点から離れたところでは一度に一本しか横切らない）。したがって f の符号は隣り合う扇形ごとに交互に入れ替わる。

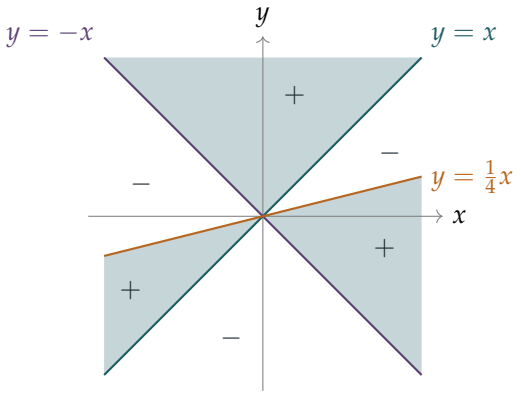
符号を確定させるために $(1,0)$ をとる。$f(1,0) = 1 > 0$ であり、$(1,0)$ は 315° と 14° の間の扇形にある。よって一周すると、符号は次のようになる。

扇形（度）	$-45, 14$	$14, 45$	$45, 135$	$135, 194$	$194, 225$	$225, 315$
符号：f	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$

試しに確かめると、三列目では $f(0,1)=4>0$、五列目では $f(-3,-1)=8>0$ である。

したがって $f(x,y)\geq 0$ となるのは、下図で網掛けした三つの扇形と、三本の直線すべて（そこでは $f=0$）である。

- x 軸の正の部分を含む扇形。$x>0$ において、$y=-x$（下側）と $y=\frac{1}{4}x$（上側）の間にある。
- y 軸の正の部分を含む扇形。$y>0$ において、$y=x$ と $y=-x$ の間にある。
- 第 3 象限にある、$y=x$ と $y=\frac{1}{4}x$ の間の細い扇形。



考えてみよう 原点のまわりに半回転すると、網掛けが入れ替わるだけで図が変わらないのはなぜだろうか。

f のすべての項は奇数次 3 なので、$f(-x,-y)=-f(x,y)$ である。点を原点のまわりに 180° 回転すると f の符号が反転するので、網掛けした扇形はそれぞれ網掛けしていない扇形の反対側にある。これはどんな概形図にも使える手早い検算である。網掛けした扇形とそうでない扇形は向かい合う対にならなければならず、実際にそうなっている。

検算

- 直線 $y=1$ の上では $f(x,1)$ はちょうど小問 (i) の三次式なので、$y=1$ のうち網掛けされる部分は $-1\leq x\leq 1$ と $x\geq 4$ になるはずである。図では、$y=1$ は $y=-x$ と $y=x$ の間（$x=-1$ から $x=1$ まで）で網掛けされており、$y=\frac{1}{4}x$ と交わる $x=4$ で再び網掛けした扇形に入る。
- x 軸上では $f=x^3$ であり、これが非負になるのはちょうど $x\geq 0$ のときである。実

際、x 軸の正の部分は網掛けされ、負の部分はされていない。

- 数値的には、2×10^5 個の無作為な点で f を計算したところ、その符号はつねに六つの扇形の符号表と一致した。たとえば $f(1,0) = 1$、$f(0,-1) = -4$、$f(-3,-1) = 8$ である。

よくある間違い

- $y < 0$ のときに y^3 で割って、不等号の向きをそのままにしてしまう。そこでは $y^3 < 0$ なので条件は $t^3 - 4t^2 - t + 4 \leq 0$ となる。下半平面が上半平面と異なって見えるのはこのためである。
- $y > 0$ についてだけ小問 (i) の答えを使って網掛けし、$y < 0$ のことをまったく忘れてしまう。
- 直線そのものを除いてしまう。不等式は等号を含むので、直線も領域に属する。

STEP のその先へ

すべての項が同じ次数をもつ多項式を**同次多項式**（homogeneous polynomial）という。その零点集合は原点を通る直線の和集合であり、その符号は方向だけで決まる。同次多項式は、原点を通る直線全体を一つの点とみなす射影幾何学（projective geometry）の出発点であり、線形代数の講義で円錐曲線（conics）や二次形式（quadratic forms）を分類するときにも再び現れる。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は二次形式を扱っており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の上級問題集）にはこの種の STEP の問題がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。