解答例

STEP III 1994、第 9 問

力学 ・ 等時曲線と衝突

> **STEP III 1994、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/94-s3-q9

この問題は、*Beyond STEP* の第 11.4 節「**等時曲線**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch11/tautochrone.html

鍵となる考え方

曲面に沿ったエネルギー保存（energy conservation）から第一積分（first integral）が得られ、お椀の形 $y = s^2/(4k)$ によって、それは弧長（arc length）s に関する単振動（simple harmonic motion）のエネルギー方程式になる。単振動の周期（period）は振幅（amplitude）によらないので、静止状態から放された粒子は、どこから出発しても同じ時間で V に達する。このため、最後の小問の 2 つの粒子は必ず V で出会い、しかも何度も繰り返し出会うことになる。

解答

定数

粒子を滑らかな曲面上の質点としてモデル化する。粒子にはたらく力は重力と垂直抗力（normal reaction）の 2 つである。粒子は静止状態から動き出すので、その速度は、出発点と軸を含む鉛直面に垂直な水平成分をもたずに始まる。どちらの力もその鉛直面に垂直な成分をもたない（軸対称な曲面の抗力は軸を含む平面内にある）ので、粒子はその鉛直断面内にとどまる。粒子は曲線 $s = 2\sqrt{ky}$ に沿って速さ $|\mathrm{d}s/\mathrm{d}t|$ で運動する。

曲面は滑らかなので、垂直抗力は速度に垂直であり、仕事をしない。仕事をするのは

重力だけなので、力学的エネルギーは保存される：

$$\tfrac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 + mgy = \text{一定}.$$

両辺に $2/m$ を掛けると、$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 + 2gy$ が一定であることがわかり、示すべきことが示された。高さ h で静止状態から放した場合、この定数は $2gh$ である。

V に達するまでの時間

曲線上では $y = s^2/(4k)$ である。これを代入すると

$$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{g}{2k}s^2 = 2gh.$$

t で微分し、$2\,\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ で割る（粒子が動いている間は正当である）と

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{2k}s,$$

となる。これは s に関する単振動であり、$\omega^2 = \dfrac{g}{2k}$、中心は $s = 0$、すなわち点 V である。

考えてみよう 放してから V に達するまでの時間が周期の 4 分の 1 になるのはなぜか。

粒子は端の位置 $s_0 = 2\sqrt{kh}$ から静止状態で出発するので、$s = s_0\cos\omega t$ である。初めて $s = 0$ に達するのは $\omega t = \frac{\pi}{2}$ のときであり、これは周期 $2\pi/\omega$ の 4 分の 1 である。したがって、V に達するまでの時間は

$$T = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2k}{g}} = \pi\sqrt{\frac{k}{2g}},$$

であり、示すべきことが示された。これは h によらない。すなわち、このお椀は**等時曲線**（tautochrone）である。

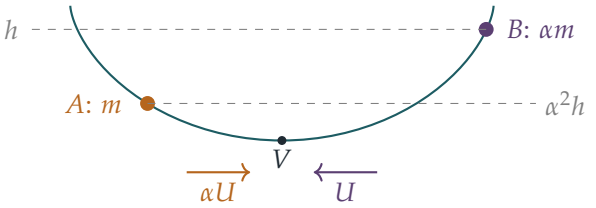
後で使うために記しておくと、V での速さは ωs_0 であり、エネルギー方程式で $y = 0$ とおいて直接求めれば $\sqrt{2gh}$ である。

2 つの粒子

2 つの粒子を、V で正面衝突する質点として扱う。V での接線は水平なので、衝突は水平な直線に沿って起こる。質量 m の粒子（高さ $\alpha^2 h$ から放す）を粒子 A、質量 αm の粒子（反対側の高さ h から放す）を粒子 B とよぶ。

2 つの粒子は V で出会う。前の小問より、各粒子は出発の高さによらず時間 T の後に V に達する。2 つは同時に放されるので、同時に V に到着し、時刻 T にそこで衝突する。

衝突直前の速さ。$U=\sqrt{2gh}$ とおく。エネルギー方程式より、A は速さ $\sqrt{2g\alpha^2h}=\alpha U$、$B$ は速さ U で、互いに逆向きに到着する。A の運動の向きを正とする。



衝突前の運動量は

$$m(\alpha U)+\alpha m(-U)=0.$$

である。質量と高さがこのように選ばれているのはこのためである。

1 回目の衝突の後。衝突後の速度を v_A、v_B とする。運動量保存（conservation of momentum）とニュートンの実験則（Newton's experimental law、はね返り係数の式）より

$$mv_A+\alpha m\,v_B=0,\qquad v_B-v_A=\alpha\big(\alpha U-(-U)\big)=\alpha(1+\alpha)U.$$

1 つ目の式より $v_B=-v_A/\alpha$ である。これを 2 つ目の式に代入すると $-v_A(1+\alpha)/\alpha=\alpha(1+\alpha)U$ となるので

$$v_A=-\alpha^2U,\qquad v_B=\alpha U.$$

どちらの速度も向きが反転し、α 倍になっている。（全運動量が 0 のとき、相対速度も各粒子の速度もすべて $-\alpha$ 倍になる。）したがって、各粒子はお椀の**自分の**側を上っていく。エネルギー保存より、A は高さ α^4h まで、B は高さ α^2h まで上がる。

同じパターンが繰り返される。各粒子は、衝突から時間 T 後の同じ瞬間に、新しい最高点で静止する。その後、それぞれさらに時間 T かけて V に戻る。したがって、2 つの粒子は時刻 $3T$ に再び V で衝突し、そのとき A は高さ α^4h から、B は高さ α^2h から来ている。これは、最初の配置で h を α^2h に置き換えたものとちょうど同じである。再び全運動量は 0 であり、再びどちらの速度も向きが反転して α 倍になる。

帰納法（induction）により、第 n 回目の衝突は時刻 $(2n-1)T$ に V で起こり、その後

$$A\text{ の到達高さは}\alpha^{2n+2}h,\qquad B\text{ の到達高さは}\alpha^{2n}h,$$

となる。いずれも出発したのと同じ側のお椀においてである。粒子はそれぞれ自分の側で振動し、等間隔の時刻 $T,3T,5T,\ldots$ に V で衝突する。衝突のたびに速さは α 倍に

なるので、高さは α^2 倍になり、運動エネルギー（kinetic energy）の割合 $1-\alpha^2$ が失われる。衝突の間隔は常に $2T$ なので、衝突は決して終わらない。振幅は等比数列的に減少し、2 つの粒子はともに $t \to \infty$ のとき V で静止する状態に近づくが、有限の時間で V に静止することはない。

検算

- 次元（dimensions）：$s^2 = 4ky$ より k は長さなので、$\sqrt{k/g}$ は時間である。
- 数値的に、$\int_0^{s_0} \mathrm{d}s / \sqrt{2g(h-y)}$ を無作為に選んだ k と h に対して数値積分（quadrature）で計算した。$k=1$、$g=9.81$ のとき値は $0.7092\ldots = \pi\sqrt{1/19.62}$ となり、h によらなかった。
- 2 つの粒子の運動を数値的に追跡し（$\alpha = 0.6$ と $\alpha = 0.3$ の場合）、出会うたびに衝突の法則を適用した。衝突は $t/T = 1, 3, 5, 7$ で起こり、常に V において、全運動量 0 で起こった。$\alpha = 0.6$ のとき、1 回目の衝突後の高さは $0.1296h = \alpha^4 h$ と $0.36h = \alpha^2 h$ であった。
- 極限の場合 $\alpha \to 1$：等しい質量の粒子を等しい高さから放し、完全弾性衝突となるので、予想どおり各粒子は永久に出発時の高さまではね返る。

よくある間違い

- 出発から V までを半周期と考えてしまう。粒子は振動の端から出発するので、V までは 4 分の 1 周期である。
- ニュートンの実験則で向きの反転を忘れる。速さだけでなく、符号つきの速度を用いること。
- 粒子が有限回の衝突の後に静止すると主張してしまう。衝突の間隔は一定であり、（床ではずむボールとは異なり）短くならないので、無限回の衝突が無限の時間にわたって起こる。

STEP のその先へ

自然方程式（intrinsic equation）$s^2 = 4ky$ はサイクロイド（cycloid）を表す。この問題は、ホイヘンス（Huygens）の等時曲線を再発見するものである。すなわち、上下を逆にしたサイクロイド上では、底まで滑り降りる時間が出発点によらない。ホイヘンスはこれを用いて、周期が振れ幅によらない振り子時計を設計した。同じ曲線は最速降下曲線（brachistochrone）、すなわち最も速く降下できる曲線でもあり、これは

変分法（calculus of variations）によって求められる。変分法は大学 2 年次の力学の標準的な話題である。振動と衝突についてさらに学ぶには、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。