解答例

STEP III 1994、第 8 問

純粋数学 ・ 四平方恒等式

STEP III 1994、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/94-s3-q8

この問題は、*Beyond STEP* の第 7.8 節「**四つの平方数**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch07/four-squares.html

鍵となる考え方

$\begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix}$ という形の行列(matrix)の行列式(determinant)は $zz^* + ww^* = |z|^2 + |w|^2$ であり、これは 4 つの実数の平方の和である。a, b, c, d をこのような行列の 1 つに、p, q, r, s を別の 1 つに詰め込めば、$\det(AB) = \det A \det B$ から左辺が得られる。示すべきことは、積 AB も同じ特別な形をしていることである。そうであれば、その行列式もまた 4 つの平方の和となり、それらの平方が L_i^2 になる。

解答

準備

複素数 z と w に対して

$$M(z,w) = \begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix}, \qquad \det M(z,w) = zz^* - w(-w^*) = |z|^2 + |w|^2.$$

とおく。ここで

$$z_1 = a + b\mathrm{i}, \quad z_2 = c + d\mathrm{i}, \quad z_3 = p + q\mathrm{i}, \quad z_4 = r + s\mathrm{i}.$$

と選ぶ。すると

$$\det M(z_1, z_2) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2, \qquad \det M(z_3, z_4) = p^2 + q^2 + r^2 + s^2.$$

となる。

積も同じ形をもつ

展開すると

$$M(z_1,z_2)\,M(z_3,z_4)=\begin{pmatrix} z_1z_3-z_2z_4^* & z_1z_4+z_2z_3^* \\ -z_2^*z_3-z_1^*z_4^* & -z_2^*z_4+z_1^*z_3^* \end{pmatrix}.$$

である。第 1 行の成分を $w_1=z_1z_3-z_2z_4^*$、$w_2=z_1z_4+z_2z_3^*$ とおく。積の共役(conjugate)は共役の積であり、また $(z^*)^*=z$ であるから

$$w_1^*=z_1^*z_3^*-z_2^*z_4,\qquad -w_2^*=-z_1^*z_4^*-z_2^*z_3,$$

となり、これらはちょうど右下と左下の成分に一致する。したがって

$$M(z_1,z_2)\,M(z_3,z_4)=M(w_1,w_2).$$

である。

考えてみよう 積がこの特別な形をしていることは、なぜ重要なのだろうか。

一般の 2×2 複素行列では、行列式はそもそも平方の和にはならない。積が再び $M(w_1,w_2)$ の形をしているからこそ、その行列式は $|w_1|^2+|w_2|^2$ となり、4 つの実数の平方に分解できるのである。

行列式をとる

$\det(AB)=\det A\,\det B$ を用いると

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2)=\det M(w_1,w_2)=|w_1|^2+|w_2|^2.$$

である。あとは w_1 と w_2 の実部と虚部を求めればよい。

$$\begin{aligned} w_1&=(a+b\mathrm{i})(p+q\mathrm{i})-(c+d\mathrm{i})(r-s\mathrm{i})\\ &=\big[(ap-bq)+(aq+bp)\mathrm{i}\big]-\big[(cr+ds)+(dr-cs)\mathrm{i}\big]\\ &=(ap-bq-cr-ds)+(aq+bp+cs-dr)\mathrm{i},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_2&=(a+b\mathrm{i})(r+s\mathrm{i})+(c+d\mathrm{i})(p-q\mathrm{i})\\ &=\big[(ar-bs)+(as+br)\mathrm{i}\big]+\big[(cp+dq)+(dp-cq)\mathrm{i}\big]\\ &=(ar-bs+cp+dq)+(as+br-cq+dp)\mathrm{i}.\end{aligned}$$

よって

$$L_1=ap-bq-cr-ds,\qquad L_2=aq+bp+cs-dr,$$
$$L_3=ar-bs+cp+dq,\qquad L_4=as+br-cq+dp,$$

ととることができ、このとき $|w_1|^2 + |w_2|^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + L_4^2$ であるから

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2) = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + L_4^2.$$

が得られる。各 L_i は（a, b, c, d のうちの 1 文字）×（p, q, r, s のうちの 1 文字）という項の和であるから、それぞれの変数の組について別々に線形（linear）であり、要求どおりである。（答えは一意ではない。L_i の符号をどのように変えても、あるいは z_j の選び方を変えても、別の正しい組が得られる。）

検算

- $(a, b, c, d) = (1, 2, 3, 4)$、$(p, q, r, s) = (5, 6, 7, 8)$ とする。左辺は $30 \times 174 = 5220$ である。公式から $(L_1, L_2, L_3, L_4) = (-60, 12, 30, 24)$ が得られ、$3600 + 144 + 900 + 576 = 5220$ となる。
- $c = d = r = s = 0$ とおく。すると $L_3 = L_4 = 0$ となり、恒等式（identity）は $(a^2+b^2)(p^2+q^2) = (ap-bq)^2 + (aq+bp)^2$ に帰着する。これは $|z_1 z_3| = |z_1||z_3|$ から得られる二平方恒等式である。
- コンピュータによる検算で、8 つの変数を無作為に有理数で選んだ 20,000 通りについて恒等式が厳密に成り立つことを確認し、また $M(z_1, z_2)M(z_3, z_4) = M(w_1, w_2)$ が数値的に成り立つことも確認した。

よくある間違い

- 積を計算するときに第 2 行の共役を忘れてしまい、積の特別な形が崩れてしまう。
- $(c + d\mathrm{i})(r - s\mathrm{i})$ での符号の誤り。項 $-ds\,\mathrm{i}^2$ は $+ds$ になる。

STEP のその先へ

これはオイラー（Euler）の四平方恒等式（Euler's four-square identity）である。行列 $M(z, w)$ はハミルトン（Hamilton）の四元数（quaternions）の具体的なモデルになっている。これらの行列は積について閉じており、行列式は「長さ」の 2 乗にあたり、乗法的である。この恒等式は、すべての正の整数は 4 つの平方の和で表せるというラグランジュ（Lagrange）の定理の証明において鍵となる段階である。問題を素数の場合に帰着させるからである。Davenport の *The Higher Arithmetic*（高等整数論の入門書）は平方の和を扱っており、Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的複素解析）は二平方の場合について幾何学的な直観を与えてくれる。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。