解答例

STEP III 1994、第 6 問

純粋数学 • 複素数平面上の回転

> **STEP III 1994、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/94-s3-q6

鍵となる考え方

点 p のまわりの角 θ の回転（rotation）は写像 $z \mapsto p + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z-p)$ である。つまり、p を原点へ平行移動し、回転し、元へ戻す。このような写像をいくつ合成（composition）しても、必ず $z \mapsto \lambda z + \mu$ の形になる。そして「**すべての** P_1 に対して $P_{\text{last}} = P_1$」とは、この写像が恒等写像（identity）であること、すなわち $\lambda = 1$ かつ $\mu = 0$ であることを意味する。あとはこの二つの等式を幾何学的に読み解くだけである。

解答

z_5 を求める

正の向きの直角回転は i を掛けることであるから、P_1 を A のまわりに回転すると

$$z_2 = a + \mathrm{i}(z_1 - a) = (1-\mathrm{i})a + \mathrm{i}z_1.$$

同様に $z_3 = (1-\mathrm{i})b + \mathrm{i}z_2$、$z_4 = (1-\mathrm{i})c + \mathrm{i}z_3$、$z_5 = (1-\mathrm{i})d + \mathrm{i}z_4$ である。順に代入していくと

$$\begin{aligned} z_5 &= (1-\mathrm{i})(d + \mathrm{i}c + \mathrm{i}^2 b + \mathrm{i}^3 a) + \mathrm{i}^4 z_1 \\ &= (1-\mathrm{i})(d - b + \mathrm{i}(c-a)) + z_1. \end{aligned}$$

P_5 が P_1 に戻るのはいつか

直角回転を 4 回行うと一回転になるので、z_1 の係数はちょうど 1 であり、

$$z_5 - z_1 = (1-\mathrm{i})(d - b + \mathrm{i}(c-a)),$$

となる。これは z_1 にまったく依存しない。合成写像は純粋な平行移動（translation）である。$1-\mathrm{i}\neq 0$ であるから

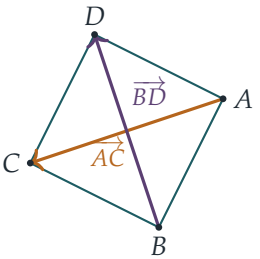
$$\begin{aligned} z_5 = z_1 \text{、任意の} z_1 &\iff d-b+\mathrm{i}(c-a)=0 \\ &\iff \mathrm{i}(c-a)=b-d \\ &\iff a-c=\mathrm{i}(b-d), \end{aligned}$$

ここで最後の段階では両辺に $-\mathrm{i}$ を掛けた（$-\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}=1$ である）。どの段階も逆にたどれるので、これが求める必要十分条件（if and only if）である。（条件が成り立たないときは平行移動量が 0 でなく、そのときは**どのように** P_1 を選んでも $P_5\neq P_1$ となる。）

考えてみよう $a-c=\mathrm{i}(b-d)$ は図形 $ABCD$ について何を述べているか。

-1 を掛けると、条件は $c-a=\mathrm{i}(d-b)$ となる。$c-a$ はベクトル $\overrightarrow{AC}$ を、$d-b$ はベクトル $\overrightarrow{BD}$ を表す。i を掛けることは、ベクトルの長さを変えずに $\pi/2$ だけ回転することである。したがって、

$\overrightarrow{AC}$ は $\overrightarrow{BD}$ を正の向きに直角だけ回転したものである。すなわち、四角形 $ABCD$ の対角線（diagonal）AC と BD は長さが等しく互いに垂直であり、AC は BD を反時計回りに直角回転した向きにある。



図の例では $\overrightarrow{BD}=-1+3\mathrm{i}$、$\overrightarrow{AC}=-3-\mathrm{i}=\mathrm{i}(-1+3\mathrm{i})$ である。向き（orientation）が重要である。**時計回り**に頂点名をつけた正方形はこの条件を満たすが、反時計回りにつけたものは満たさない（その場合は $\overrightarrow{AC}=-\mathrm{i}\,\overrightarrow{BD}$ となる）。

角 θ の回転を 3 回行う場合

$w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ とおく。先ほどとまったく同様に、各段階は $z\mapsto(1-w)p+wz$ であるから

$$\begin{aligned} z_4 &= (1-w)c+w\big((1-w)b+w\big((1-w)a+wz_1\big)\big) \\ &= (1-w)\big(c+wb+w^2a\big)+w^3z_1. \end{aligned}$$

これは $\lambda=w^3$、$\mu=(1-w)(c+wb+w^2a)$ とした $\lambda z_1+\mu$ である。これがすべての z_1 に対して z_1 に等しくなるための必要十分条件は $\lambda=1$ かつ $\mu=0$ である（$z_1=0$ とお

けば $\mu = 0$ が、次に $z_1 = 1$ とおけば $\lambda = 1$ が得られる)。

角について。 $w^3 = 1$ は 3θ が 2π の整数倍であることを意味する。$\theta \neq 0$ を「回転角が一回転の整数倍ではない」と解釈するので $w \neq 1$ である。よって w は 1 の虚数の 3 乗根(cube root of unity)であり、

$$\theta = \pm\tfrac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}.$$

点について。 $w \neq 1$ であるから、$\mu = 0$ は $c + wb + w^2 a = 0$ となる。w を掛けて $w^3 = 1$ を用いると $a + w^2 b + wc = 0$ が得られる。さらに $1 + w + w^2 = 0$($w^3 = 1$、$w \neq 1$ より)であるから $a = -(w + w^2)a$ と書き換えられ、

$$w(c-a) + w^2(b-a) = 0 \quad \Longrightarrow \quad c - a = -w\,(b-a) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\pi)}(b-a) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\pi)}(b-a).$$

? **考えてみよう** $\theta = \pm 2\pi/3$ のとき、$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\pi)}$ は何か。

$\theta = 2\pi/3$ のときは $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}$、$\theta = -2\pi/3$ のときは $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ である($\mathrm{e}^{-5\pi\mathrm{i}/3} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ による)。したがって $\overrightarrow{AC}$ は $\overrightarrow{AB}$ を長さを変えずに $\mp\pi/3$ だけ回転したものであり、ABC は**正三角形**(equilateral triangle)で、$\theta = 2\pi/3$ のときは A, B, C が**時計回り**に、$\theta = -2\pi/3$ のときは**反時計回り**に並ぶ。逆に、これらの各段階は逆にたどれるので、これらの条件からも $\mu = 0$ が得られる。

A, B, C は単位円上にあるので、その円は三角形の外接円(circumcircle)であり、正三角形では外心(circumcentre)が中心に一致するから、頂点は $|z| = 1$ 上に等間隔に並ぶ。二つの場合はうまく一つの主張にまとめられる。

$$\theta = \pm\tfrac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}, \qquad b = a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}, \quad c = b\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}.$$

言葉で言えば、3 回の回転はいずれも三分の一回転であり、A, B, C は単位円上に等間隔に並び、回転とは**逆の**向きに順に進む。

検算

- コンピュータで、ランダムな A, B, C, D のまわりの 4 回の直角回転をランダムな点に施したところ、z_5 の式と 10^{-9} の精度で一致した。$c = a - \mathrm{i}(b-d)$ とするとどの P_1 も元の位置に戻り、c を 0.1 だけずらすと成り立たなくなった。
- 単位円上のランダムな a と $\theta = \pm 2\pi/3$ に対し、$b = a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$、$c = b\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ とするとランダムな z_1 について $z_4 = z_1$ となった。頂点名を逆順にした場合や他の θ では成り立たなかった。
- 手計算:時計回りの単位正方形 $a = 0$、$b = \mathrm{i}$、$c = 1 + \mathrm{i}$、$d = 1$ のまわりに $z_1 = 0$ を回転する。$0 \to 0 \to 1 + \mathrm{i} \to 1 + \mathrm{i} \to 0$ となり、元の位置に戻る。

よくある間違い

- A のまわりの回転を $z \mapsto \mathrm{i}z$ と書いてしまい、先に A を原点へ移すことを忘れる。
- 向きを無視する。対角線の回転の向きも、$\theta = \pm 2\pi/3$ のそれぞれに対する三角形の向きも、条件の一部である。

STEP のその先へ

$|\lambda| = 1$ を満たす写像 $z \mapsto \lambda z + \mu$ は平面の向きを保つ等長変換（isometry）であり、群（group）をなす。角は足し合わされるので、回転の合成は角の総和だけの回転となり、総和が一回転の整数倍のときは平行移動となる。$z_5 - z_1$ が定数になったのはこのためである。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、複素数のこの幾何学的な見方を見事に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。