解答例

STEP III 1994、第 5 問

純粋数学 ・ マクローリン級数

> **STEP III 1994、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/94-s3-q5

鍵となる考え方

$\sin^{-1} x$ を 1 回微分すると平方根が現れるが、もう 1 回微分すると、平方根を含まない f'' と f' の間の関係式が得られる。次にライプニッツの定理（Leibniz's theorem）を用いると、この 1 本の方程式から、すべての高階導関数についての漸化式（recurrence）が得られる。$x = 0$ ではほとんどの項が消えるので、マクローリン係数（Maclaurin coefficients）についての簡単な漸化式が得られる。g については、対数法則（laws of logarithms）を用いれば、すべてがよく知られた $\ln(1 \pm x)$ の級数（series）に帰着する。

解答

微分方程式

$-1 < x < 1$ において

$$\mathrm{f}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}, \qquad \mathrm{f}''(x) = -\tfrac{1}{2}(1-x^2)^{-3/2} \cdot (-2x) = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

2 番目の式に $1 - x^2$ を掛けると $(1-x^2)\mathrm{f}''(x) = x(1-x^2)^{-1/2} = x\mathrm{f}'(x)$ となるので、

$$(1-x^2)\mathrm{f}''(x) - x\mathrm{f}'(x) = 0,$$

となり、示すべき式が得られた。

漸化式

この恒等式を、ライプニッツの定理 $(uv)^{(n)} = \sum_r \binom{n}{r} u^{(r)} v^{(n-r)}$ を用いて n 回微分する。1 つ目の積では $u = 1 - x^2$ とおく。その導関数は $-2x$、-2、その後は 0 となるので、

残る項は3つだけである：

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(1-x^2)\mathrm{f}''\right] = (1-x^2)\mathrm{f}^{(n+2)} + n(-2x)\mathrm{f}^{(n+1)} + \binom{n}{2}(-2)\mathrm{f}^{(n)}.$$

2つ目の積では $u = x$ であり、残る項は2つだけである：

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[x\mathrm{f}'\right] = x\mathrm{f}^{(n+1)} + n\mathrm{f}^{(n)}.$$

辺々引き、$2\binom{n}{2} = n(n-1)$ を用いると

$$\begin{aligned} 0 &= (1-x^2)\mathrm{f}^{(n+2)} - (2n+1)x\mathrm{f}^{(n+1)} - (n(n-1)+n)\mathrm{f}^{(n)} \\ &= (1-x^2)\mathrm{f}^{(n+2)} - (2n+1)x\mathrm{f}^{(n+1)} - n^2\mathrm{f}^{(n)}, \end{aligned}$$

となり、これが求める結果である。これはすべての $n \geq 1$ で成り立ち、$n = 0$ のときは最初の方程式そのものである。（好みによっては、代わりに数学的帰納法（induction）で証明してもよい。n の場合の式を1回微分して項を整理すれば $n+1$ の場合が得られる。これは同じ計算を1段ずつ行っているにすぎない。）

f のマクローリン級数

考えてみよう x をどの値にすると、この漸化式は使いやすくなるだろうか？

$x = 0$ とおく。真ん中の項は消え、$1 - x^2 = 1$ となるので

$$\mathrm{f}^{(n+2)}(0) = n^2\,\mathrm{f}^{(n)}(0) \qquad (n \geq 0).$$

出発点は $\mathrm{f}(0) = \sin^{-1} 0 = 0$ と $\mathrm{f}'(0) = 1$ である。

偶数階の導関数。 $\mathrm{f}(0) = 0$ であるから、漸化式により、偶数階の導関数はすべて0において値が0となる。$\sin^{-1}$ は奇関数（odd function）なので、これは予想どおりである。

奇数階の導関数。 $n = 1, 3, 5, \ldots$ とすると

$$\mathrm{f}'''(0) = 1^2, \quad \mathrm{f}^{(5)}(0) = 3^2 \cdot 1^2, \quad \mathrm{f}^{(7)}(0) = 5^2 \cdot 3^2 \cdot 1^2,$$

であり、一般に

$$\mathrm{f}^{(2k+1)}(0) = \left(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)\right)^2 \qquad (k \geq 1).$$

したがって

$$\sin^{-1} x = x + \frac{1^2}{3!}x^3 + \frac{1^2 \cdot 3^2}{5!}x^5 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{7!}x^7 + \cdots = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \cdots.$$

x^{2k+1} の係数はきれいに簡単になる。$(2k+1)! = (1 \cdot 3 \cdots (2k-1))(2 \cdot 4 \cdots 2k)(2k+1)$ と書き、奇数の積を1つ約分すると

$$a_{2k+1} = \frac{\left(1 \cdot 3 \cdots (2k-1)\right)^2}{(2k+1)!} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} \cdot \frac{1}{2k+1}.$$

$a_{2k+3}/a_{2k+1} \to 1$ であるから、比判定法（ratio test）により、この級数は $|x| < 1$ で収束（converge）する。そこで実際に $\sin^{-1} x$ に等しいことは、$(1-x^2)^{-1/2}$ の二項級数（binomial series）を項別積分（term-by-term integration）すればまったく同じ係数が得られることから確かめられる。

関数 g

対数法則により $\mathrm{g}(x) = \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x))$ である。$|x| < 1$ において

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots, \qquad \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots.$$

差をとると偶数乗の項は打ち消し合い、奇数乗の項は 2 倍になる。よって

$$\mathrm{g}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

（g が $\tanh^{-1} x$ であることに気づいた人もいるだろう。）

係数の比較

考えてみよう どちらの係数にも因数 $\frac{1}{2k+1}$ がある。残りで何を比べればよいだろうか？

$n \geq 1$ のとき、x^{2n+1} の係数は、g では $\dfrac{1}{2n+1}$、f では

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{1}{2n+1}$$

である。n 個の因数 $\frac{2r-1}{2r}$ はいずれも 0 と 1 の間に厳密に含まれ、$n \geq 1$ であるから少なくとも 1 つは存在する。よってそれらの積は 1 より真に小さく、したがって

$$\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \cdot \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2n+1}.$$

ゆえに g の係数のほうが大きく、示すべきことが示された。$n = 0$ のときは両方の係数が 1 に等しく、問題文でこの場合が除かれているのはそのためである。

検算

- $x = -\frac{1}{2}$ において、級数を x^{59} まで足すと -0.5235987756 となり、$\sin^{-1}(-\frac{1}{2}) = -\pi/6$ と一致する。
- 係数 $1, \frac{1}{6}, \frac{3}{40}, \frac{5}{112}$ は、$\mathrm{f}^{(n+2)}(0) = n^2 \mathrm{f}^{(n)}(0)$ から直接求めたものと一致する。比較 $\frac{1}{6} < \frac{1}{3}$、$\frac{3}{40} < \frac{1}{5}$、$\frac{5}{112} < \frac{1}{7}$ も主張どおり成り立つ。

- f の各係数は g の対応する係数以下であるから、$0 < x < 1$ において $\sin^{-1} x < \tanh^{-1} x$ となるはずである。$x = 0.5$ では $0.5236 < 0.5493$ である。

よくある間違い

- ライプニッツの定理で $\binom{n}{2}$ の項を忘れ、最終的な係数が n^2 ではなく n になってしまう。
- 2 乗を付けずに $\mathrm{f}^{(2k+1)}(0) = 1 \cdot 3 \cdots (2k-1)$ と書いてしまう。漸化式の各段階で掛かるのは n ではなく n^2 である。
- マクローリン係数を求めるときに、$(2k+1)!$ ではなく $(2k)!$ や $(2k+1)$ だけで割ってしまう。

STEP のその先へ

比 $\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}$ は $\binom{2n}{n}/4^n$ に等しく、n が大きいとき $1/\sqrt{\pi n}$ のように振る舞う。これはウォリス（Wallis）の積（Wallis's product）とスターリングの公式（Stirling's formula）から導かれる。$\sin^{-1} x$ の級数は $x = 1$ でも収束して $\pi/2$ を与えるが、それを証明するには、収束区間（interval of convergence）の端点におけるべき級数（power series）についてのアーベル（Abel）の定理（Abel's theorem）が必要である。関数の導関数が微分方程式（differential equation）を満たすとき、係数についての漸化式が得られる。これは常微分方程式（ODE）の級数解法（series solutions）と呼ばれる方法であり、Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）で扱われている。テイラー級数（Taylor series）が実際にもとの関数に等しくなるのはどのような場合かについての丁寧な証明は、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学を理解する）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。