解答例

STEP III 1994、第 4 問

純粋数学 • 常微分方程式の特異解

> **STEP III 1994、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/94-s3-q4

この問題は、*Beyond STEP* の第 8.1 節「解が一意でないとき」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch08/non-uniqueness.html

鍵となる考え方

両辺の平方根をとると、方程式は $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \pm 2\sqrt{y}$ となり、ただちに変数分離（separation of variables）ができる。さらによいのは、どの放物線（parabola）$y = (x-c)^2$ もこの方程式を満たすことに気づくことである。つまり解は、$y = x^2$ を x 軸に沿ってずらしたものにすぎない。この図が見えてしまえば、後半の小問は、どのコピーがどの点を通るか、そしてすべてのコピーに共通するものは何か、という問題になる。

解答

一般解

$(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2 \geq 0$ であるから、どの解も $y \geq 0$ を満たす。$y > 0$ となるところでは、定数 c を用いて

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm 2\sqrt{y} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm 1 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{y} = \pm(x-c)$$

と書ける。どちらの符号でも、両辺を 2 乗すると

$$y = (x-c)^2.$$

を得る。左半分、右半分、そして頂点（vertex）も含めて、この放物線全体が解であることを直接確かめておく価値がある。$y' = 2(x-c)$ であるから、すべての x に対して

$(y')^2 = 4(x-c)^2 = 4y$ である。

> **考えてみよう** 2 つの符号から同じ式が得られた。では、「±」はどこへ行ったのだろうか？

それは各放物線の 2 つの半分に隠れている。$y = (x-c)^2$ 上では、傾き $2(x-c)$ は頂点の左側で $-2\sqrt{y}$、右側で $+2\sqrt{y}$ であり、1 つの放物線が両方の符号を使っているのである。符号の選択は、ある点を通るように合わせるとき、c の選択として再び現れる。

(a, b^2) を通る解

$(a-c)^2 = b^2$ が必要であるから、$a - c = \pm b$、すなわち $c = a - b$ または $c = a + b$ である。2 つの解は

$$y = (x-a+b)^2 \qquad \text{および} \qquad y = (x-a-b)^2.$$

である。$b \neq 0$ より $a - b \neq a + b$ であるから、これらは異なる。（もし $b = 0$ ならば、これらは頂点が $(a, 0)$ の 1 つの放物線に一致してしまう。このとき、その点は解 $y = 0$ の上にもあることになるが、これについては最後に再び扱う。）b を $-b$ に置き換えると 2 つが入れ替わるだけであり、点 (a, b^2) は変わらないのだから、これは当然である。

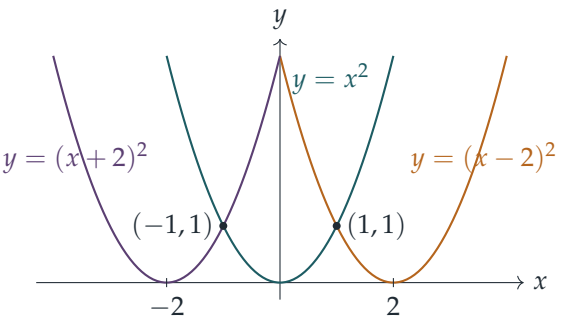
点 $(a_1, 1)$ と $(a_2, 1)$

$b = 1$ とする。$(a, 1)$ を通る解は $y = (x-a+1)^2$ と $y = (x-a-1)^2$ である。放物線 $y = (x-c)^2$ が原点を通るのはちょうど $c = 0$ のときであるから、$a - 1 = 0$ または $a + 1 = 0$ が必要である。よって

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = -1.$$

$(1, 1)$ を通る解は $y = x^2$（$c = a_1 - 1 = 0$ から）と $y = (x-2)^2$ である。$(-1, 1)$ を通る解は $y = (x+2)^2$ と $y = x^2$（$c = a_2 + 1 = 0$ から）である。

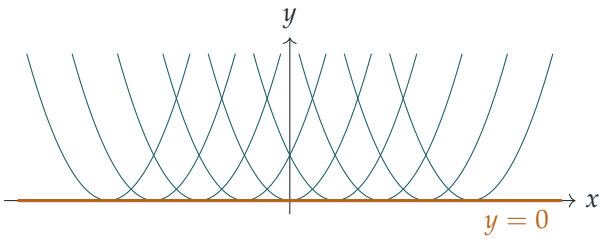
原点を通る解は、どちらの点についても同じ曲線 $y = x^2$ であり、したがってそのグラフは一致する。これは驚くことではない。$(1, 1)$ と $(-1, 1)$ は、$y = x^2$ 上で高さ 1 にある 2 点であり、頂点の両側に 1 つずつある。残りの 2 つの解は $y = (x-2)^2$ と $y = (x+2)^2$ であり、これらは $y = x^2$ をそれぞれ右と左に 2 だけ平行移動したものである。



$(1,1)$ において、曲線 $y=x^2$ の傾きは $+2$、$y=(x-2)^2$ の傾きは -2 である。一般に、ある点を通る 2 つの解は、その点で傾き $\pm 2b$ をもって交わり、それぞれが一方の平方根に対応している。

曲線族とその共通接線

a と b を動かすことは、$c=a\pm b$ をすべての実数にわたって動かすことにほかならない。したがって、この曲線族は $y=x^2$ を水平方向に平行移動（translate）したものすべてである。



どの放物線も頂点 $(c,0)$ で x 軸に接し、そこでの傾きは 0 である。よって直線 $y=0$ は曲線族全体の共通接線（common tangent）である（これは曲線族の**包絡線**（envelope）である）。

このことが重要なのは、$y=0$ そのものが解だからである。実際、このとき $y'=0$ であり、$(y')^2=0=4y$ となる。しかし、これはどの c に対する放物線でもない。これは**特異解**（singular solution）であり、変数分離の過程で $\sqrt{y}$ で割ったために見落とされたのである。各点 $(c,0)$ において、解 $y=0$ と放物線 $y=(x-c)^2$ は同じ値と同じ傾きをもつから、x 軸上の点を通る解は一意（unique）ではない。実際、解をつなぎ合わせることができる。$p<q$ に対して

$$y=\begin{cases}(x-p)^2, & x<p,\\ 0, & p\le x\le q,\\ (x-q)^2, & x>q\end{cases}$$

は連続な導関数をもち、いたるところで方程式を満たす。したがって厳密には、(a, b^2) を通る「2 つの解」とは、その点の近くで放物線と一致する 2 つの解のことである。その点から離れたところでは、解が x 軸に達すると、しばらく軸に沿って進んでから離れていくこともありうる。

検算

- 代入して確かめる：$y = (x - a \pm b)^2$ について、$x = a$ のとき $y = b^2$ となり、$(y')^2 = 4y$ は恒等的に成り立つ。
- (a, b^2) における 2 つの傾きは $2(a - c) = \pm 2b$ であり、その 2 乗はどちらも $4b^2 = 4y$ で、要求どおりである。
- 数値的にも、中心差分（central difference）による導関数を用いて、無作為に選んだ放物線および上のつなぎ合わせた曲線（$p = -1, q = 1$）について $(y')^2 = 4y$ が成り立つこと、また $(1, 1)$ と $(-1, 1)$ を通る解がそれぞれ $c \in \{0, 2\}$ と $c \in \{-2, 0\}$ をもち、共通なのは $c = 0$ のみであることを確認した。

よくある間違い

- $y' = 2\sqrt{y}$ だけを書き、その結果、各点を通る放物線の半分だけしか得られない。
- $y = 0$ を忘れる：これは正真正銘の解であり、まさに最後の小問が求めている共通接線である。
- $(a_1, 1)$ と $(a_2, 1)$ を通る解のうち原点を通る 2 つを異なる曲線だと考えてしまう。どちらも $y = x^2$ である。

STEP のその先へ

この方程式は、解の一意性が崩れる場合の標準的な例である。ピカール–リンデレーフの定理（Picard–Lindelöf theorem）は、f が y についてリプシッツ連続（Lipschitz）であるとき、$y' = f(x, y)$ の解がある点を通るものとしてちょうど 1 つ存在することを保証する。しかし $\pm 2\sqrt{y}$ は $y = 0$ の近くでリプシッツ連続ではなく、まさにそこで放物線たちと特異解が出会うのである。1 パラメータ曲線族の包絡線と、それがクレロー（Clairaut）型のような方程式に対して与える特異解は、常微分方程式（ODE）の入門講義における古典的な話題である。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（『微分方程式入門』）では、存在と一意性がこのような例とともに論じられている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。