解答例

STEP III 1994、第 3 問

純粋数学 • 球、平面と絡み

> **STEP III 1994、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/94-s3-q3

鍵となる考え方

各円はそれぞれ自分の平面上にあり、二つの平面は直線 L で交わる。したがって、C_1 が C_2 の平面を通り抜けうるのは L 上にある自身の 2 点に限られ、逆についても同様である。よって、二つの円が絡み合っている（linked）かどうかは一次元の問題、すなわち L 上の 4 点が直線に沿ってどのように並んでいるかという問題に帰着する。

解答

平面と球面

中心 Q、半径 r の球面（sphere）を考え、Q から平面 Π までの距離を d とする。Q から Π に下ろした垂線の足（foot of the perpendicular）を F とする。Π 上の点 X に対して、三平方の定理（Pythagoras' theorem）より $QX^2 = d^2 + FX^2$ であるから、X が球面上にあるのは $FX^2 = r^2 - d^2$ のとき、かつそのときに限る。よって次が成り立つ。

- $d > r$ のとき、平面は球面と交わらない。
- $d = r$ のとき、平面は球面にただ 1 点 F で接する（接平面（tangent plane）である）。
- $d < r$ のとき、共通部分は Π 内の、中心 F、半径 $\sqrt{r^2 - d^2}$ の円である。$d = 0$ のとき、これは半径 r の大円（great circle）である。

与えられた条件

平方完成（completing the square）すると、S_2 は

$$x^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 3,$$

となり、中心 $(0,3,2)$、半径 $\sqrt{3}$ である。球面 S_1 は中心 O、半径 $\sqrt{7}$ である。

O から P_1 までの距離は $\frac{|-1|}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} < \sqrt{7}$ であるから、C_1 は確かに円であり、その半径は $\sqrt{7 - \frac{1}{10}}$ である。$(0,3,2)$ から P_2 までの距離は $\frac{|0-3+1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} < \sqrt{3}$ であるから、C_2 は半径 $\sqrt{3-2} = 1$ の円である。その中心は垂線の足 $(0,3,2) + (1,-1,0) = (1,2,2)$ である。実際に $1-2+1=0$ となることを確かめよ。

直線 L

二つの平面の方程式の差をとると $2x - 2 = 0$ となるので $x = 1$ であり、すると $y = x + 1 = 2$ となる。一方、z は任意である。よって

$$L = \{(1,2,t) : t \in \mathbb{R}\},$$

であり、これは $(1,2,0)$ を通る鉛直な直線である。

S_1 上では $1 + 4 + t^2 = 7$ より $t = \pm\sqrt{2}$ である。よって L と S_1 の交点は次の 2 点である。

$$(1,2,\sqrt{2}) \quad と \quad (1,2,-\sqrt{2}).$$

S_2 上では $1 + 1 + (t-2)^2 = 3$ より $t - 2 = \pm 1$ である。よって L と S_2 の交点は次の 2 点である。

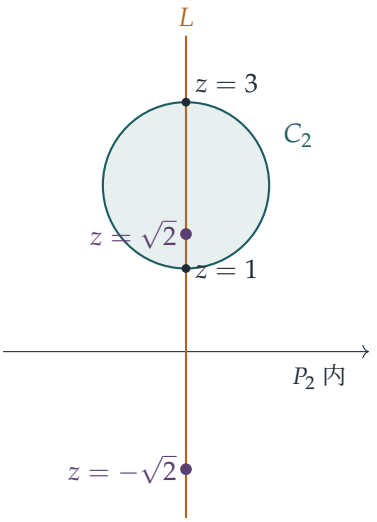
$$(1,2,1) \quad と \quad (1,2,3).$$

L は P_1 内にあるから、L の点のうち S_1 上にあるものは、ちょうど L の点のうち C_1 上にあるものである。同様に、L の点のうち S_2 上にあるものは L の点のうち C_2 上にあるものである。特に $(1,2,1)$ と $(1,2,3)$ は C_2 の直径の両端であり、これは中心が $(1,2,2)$、半径が 1 であることと整合する。

二つの円は絡み合っているか？

まず、二つの円は交わらない。共通点があればそれは $P_1 \cap P_2 = L$ 上にあるが、L 上にある C_1 の点（$z = \pm\sqrt{2}$）と L 上にある C_2 の点（$z = 1, 3$）は異なる。

C_2 を境界とする P_2 内の平らな円板（disc）を D_2 とする。これは L と、$(1,2,1)$ から $(1,2,3)$ までの直径、すなわち $1 \le t \le 3$ を満たす点 $(1,2,t)$ 全体において交わる。



図は平面 P_2 を表し、C_2 とそれが囲む円板を網掛けで示している。紫の点は C_1 が P_2 を通り抜ける点である。

考えてみよう なぜ C_1 はこれら 2 点で、単に接するのではなく、実際に P_2 を**通り抜ける**のだろうか？

直線 L は平面 P_1 を二つの半平面（half-plane）に分ける。P_1 は L に沿って P_2 を横切っているので、これらの半平面は P_2 に関して互いに反対側にある。円 C_1 は L と相異なる 2 点で交わるので、L は C_1 を二つの弧に分け、それぞれの半平面に弧が一つずつある。したがって、C_1 の一方の弧は P_2 の一方の側に真に含まれ、もう一方の弧は真に反対側にあり、C_1 は $(1,2,\sqrt{2})$ と $(1,2,-\sqrt{2})$ で P_2 を横切り、それ以外の点では横切らない。

ここで $1<\sqrt{2}<3$ であるから、$(1,2,\sqrt{2})$ での交差は円板 D_2 の内部にある。しかし $-\sqrt{2}<1$ であるから、$(1,2,-\sqrt{2})$ での交差は円板の外部にある。C_1 を一周すると、C_2 が張る円板をちょうど 1 回通り抜け、円板の外側で P_2 を横切って戻ってくる。言い換えると、鎖の二つの輪のように、C_1 は C_2 を 1 回くぐり抜けている。

L に沿って 4 点は

$$-\sqrt{2} \ < \ 1 \ < \ \sqrt{2} \ < \ 3,$$

の順に並ぶので、C_1 からの 2 点と C_2 からの 2 点は**交互に並ぶ**（interleave）。まさにこのことによって、C_1 は D_2 をちょうど 1 回横切る。（どちらの対も他方を分離していなければ、C_1 は D_2 を 2 回横切るか、まったく横切らないかのいずれかであり、二つの円は絡み合わない。）よって、**円 C_1 と C_2 は絡み合っている**。

二つの円を引き離すことはできない。二つの円を互いに遠く離れた位置へ移す連続的

な動きがあったとすると、C_1 が C_2 の円板を横切る回数は奇数から偶数へ変わらなければならない。しかし、一方の円が他方の円を通り抜けない限り、交差は対になって生じたり消えたりするだけであり、切断せずに引き離す場合にはそのような通り抜けは許されない。

検算

各点を代入して確かめる。たとえば $(1,2,1)$ からは $3-2-1=0$、$1-2+1=0$、$1+4+1-12-4+10=0$ が得られる。数値的には、二つの円をパラメータ表示し、ガウス（Gauss）の絡み数積分（linking integral）$\frac{1}{4\pi}\oint\oint \frac{(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\cdot(\mathrm{d}\mathbf{r}_1\times\mathrm{d}\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|^3}$ を計算したところ、1.002 を得た（絡み合っていない対では 0 となる）。また、二つの円の最短距離はおよそ 0.09 であることもわかった。したがって二つの円は非常に近づくが、接してはいない。

よくある間違い

- 二つの円が交わるかどうかだけを調べること。実際に交わらないが、それだけでは絡み合いについて何もわからない。
- C_1 と P_2 の交差は L 上になければならないことを忘れ、それ以外の場所で探すこと。
- S_2 の中心を間違えること。$-6y$ と $-4z$ の項から中心は $(0,3,2)$ であり、$(0,-3,-2)$ ではない。

STEP のその先へ

交わらない二つの閉曲線が絡み合っているかどうかは、整数値の不変量（invariant）である**絡み数**（linking number）によって測られる。絡み数は、一方の曲線が他方を境界とする曲面を通り抜ける交差を符号付きで数えること（ここで行った方法）によっても、「検算」で用いたガウスの二重積分によっても計算できる。絡み数は結び目理論（knot theory）と代数的位相幾何学（algebraic topology）への第一歩である。Colin Adams の *The Knot Book* は非常に読みやすい入門書である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。