解答例

STEP III 1994、第 2 問

純粋数学 ・ 相反 4 次方程式

> **STEP III 1994、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/94-s3-q2

鍵となる考え方

(i) の四次式（quartic）は回文的（palindromic）である。すなわち、係数（coefficient）を前から読んでも後ろから読んでも同じになる。x^2 で割ると x^2 と x^{-2}、x と x^{-1} がそれぞれ組になり、どちらの組も $y = x + x^{-1}$ を用いて表せるので、四次式は y の二次式（quadratic）に帰着する。(ii) にはヒントがないので、同じ対称性を少しひねったものを探す。係数 1, 1, −10, −4, 16 は、倍率を許せば組になる。このことから置換（substitution）$y = x - 4/x$ が示唆される。

解答

小問 (i)

定数項（constant term）は $1 \neq 0$ なので $x = 0$ は根（root）ではなく、x^2 で割ってよい：

$$x^2 + 10x + 26 + \frac{10}{x} + \frac{1}{x^2} = 0, \qquad \text{すなわち} \qquad \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 10\left(x + \frac{1}{x}\right) + 26 = 0.$$

$y = x + x^{-1}$ とおくと $y^2 = x^2 + 2 + x^{-2}$ であるから、$x^2 + x^{-2} = y^2 - 2$ である。よって方程式は

$$y^2 - 2 + 10y + 26 = 0 \iff y^2 + 10y + 24 = 0 \iff (y+4)(y+6) = 0,$$

となり、$y = -4$ または $y = -6$ である。ここで x に戻る。$x + x^{-1} = y$ の両辺に x を掛ける（$x \neq 0$ なので、これも問題ない）：

$$x + \frac{1}{x} = -4 \iff x^2 + 4x + 1 = 0 \iff x = -2 \pm \sqrt{3},$$
$$x + \frac{1}{x} = -6 \iff x^2 + 6x + 1 = 0 \iff x = -3 \pm 2\sqrt{2}.$$

これらは相異なる4つの数であり、四次方程式の根は高々4個であるから、解は

$$x = -2 \pm \sqrt{3}, \qquad x = -3 \pm 2\sqrt{2}.$$

である。根が逆数（reciprocal）どうしの組になっていることに注意しよう：$(-2+\sqrt{3})(-2-\sqrt{3}) = 1$、$(-3+2\sqrt{2})(-3-2\sqrt{2}) = 1$ である。x を $1/x$ に置き換えて x^4 を掛けると同じ方程式に戻るので、回文的な多項式では必ずこうなる。

小問 (ii)

考えてみよう 係数 1, 1, −10, −4, 16 は対称ではない。それでもうまくいく、(i) のような置換はあるだろうか？

外側の係数の組を比べてみる。定数項は最高次の係数の $16 = 4^2$ 倍であり、x の係数は x^3 の係数の -4 倍である。したがって項は

$$x^4 + 16 = x^2\left(x^2 + \frac{16}{x^2}\right), \qquad x^3 - 4x = x^2\left(x - \frac{4}{x}\right).$$

のように組になる。これは回文的なパターンで $1/x$ を $-4/x$ に置き換えたものである。$x = 0$ は根ではない（定数項は16）ので、x^2 で割ると

$$\left(x^2 + \frac{16}{x^2}\right) + \left(x - \frac{4}{x}\right) - 10 = 0.$$

となる。$y = x - 4/x$ とおく。すると $y^2 = x^2 - 8 + 16/x^2$ なので $x^2 + 16/x^2 = y^2 + 8$ であり、

$$y^2 + 8 + y - 10 = 0 \iff y^2 + y - 2 = 0 \iff (y-1)(y+2) = 0,$$

より $y = 1$ または $y = -2$ を得る。$x - 4/x = y$ に x を掛けると：

$$x - \frac{4}{x} = 1 \iff x^2 - x - 4 = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2},$$
$$x - \frac{4}{x} = -2 \iff x^2 + 2x - 4 = 0 \iff x = -1 \pm \sqrt{5}.$$

ここでも相異なる4つの根が得られたので、これですべてである：

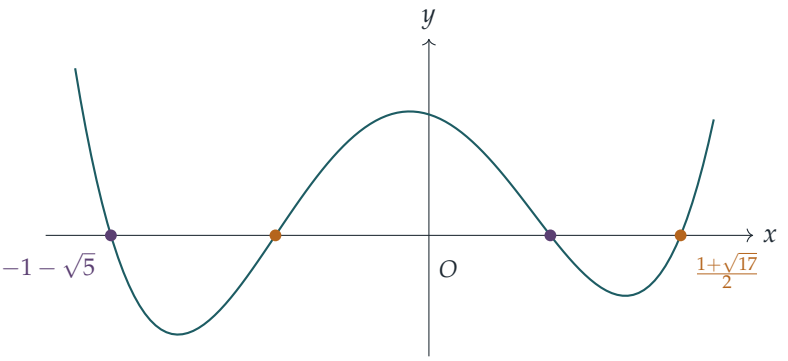
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}, \qquad x = -1 \pm \sqrt{5}.$$

今度は根が積1ではなく積 -4 の組になっている。対称性は $x \mapsto -4/x$ になったのである。

検算として、以上の計算は因数分解（factorisation）

$$x^4 + x^3 - 10x^2 - 4x + 16 = (x^2 - x - 4)(x^2 + 2x - 4),$$

にほかならない。これは展開すれば確かめられる：x^3 の項は $2 - 1 = 1$、x^2 の項は $-4 - 2 - 4 = -10$、x の項は $4 - 8 = -4$ となる。



(ii) の四次式のグラフは軸と 4 回交わる。琥珀色の根は $x^2-x-4=0$ から、紫色の根は $x^2+2x-4=0$ から得られる。

検算

- 根の積：(i) では 4 つの根の積は $1\cdot 1=1$ で、定数項に等しい。(ii) では積は $(-4)(-4)=16$ で、やはり定数項に等しい。
- 根の和：(i) では $(-4)+(-6)=-10$ で、x^3 の係数の符号を変えたものである。(ii) でも $1+(-2)=-1$ で同様である。
- 数値的には、$x=-2+\sqrt{3}\approx -0.268$ と $x=-3-2\sqrt{2}\approx -5.828$ はいずれも (i) の四次式を 10^{-9} 以内の誤差で 0 にし、$x=\frac{1}{2}(1+\sqrt{17})\approx 2.562$ と $x=-1-\sqrt{5}\approx -3.236$ も (ii) で同様である。

よくある間違い

- 交差項を忘れる：$x^2+x^{-2}=y^2-2$ であって y^2 ではない。また (ii) では $x^2+16x^{-2}=y^2+8$ であり、$(x-4/x)^2$ の交差項が -8 なので符号はプラスになる。
- (ii) で $y=x+4/x$ を試す。これでも $x^2+16/x^2=y^2-8$ は得られるが、x^3-4x は作れない。その符号からは $x-4/x$ が必要になる。
- y の値を求めたところで止めてしまう。問題が求めているのは x であり、y の各値から x の値が 2 つずつ得られる。

STEP のその先へ

この技法がうまくいくのは、多項式がある置換のもとで不変（invariant）だからである。(i) では $x\mapsto 1/x$、(ii) では $x\mapsto -4/x$ である。量 y はその置換で変わらず、変わ

らない多項式の式はすべて y で表すことができる。これはガロア理論（Galois theory）を初めて垣間見るものである。ガロア理論では、多項式の根の間の対称性が、その方程式をどのように解けるかを決定する。これらの考え方が展開されていく様子を見るには、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）がよい出発点である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。