解答例

STEP III 1994、第 14 問

確率・統計 ・ 幾何的確率

STEP III 1994、問 14

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/94-s3-q14

鍵となる考え方

円に内接する角、すなわち円周角（inscribed angle）は、向かい合う弧（arc）が中心に張る角、すなわち中心角（central angle）の半分である。したがって三角形の 3 つの角は、P, Q, R が円を切り分けてできる 3 つの弧の長さを円周に対する割合で測ったものに、ちょうど π を掛けたものになる。こうして問題は、円がランダムに 3 つの部分に分けられる様子についての問題となり、それは三角形の内部の面積についての問題になる。

解答

設定

円周上の位置を円周に対する割合で測り、円の「長さ」を 1 とする。回転対称性により P の位置は関係ないので、P を 0 に置く。すると Q と R は、$[0,1)$ 上の一様分布に従う互いに独立な位置にある。

Q と R の位置を小さい順に並べたものを $U < V$ とする。組 (U,V) は面積 $\frac{1}{2}$ の領域 $0 < u < v < 1$ 上で一様に分布するので、その同時密度（joint density）はそこで 2 である。（2 点が一致する確率は 0 であり、以下に現れる境界の場合もすべて確率 0 である。）3 つの弧は

$$X = U, \qquad Y = V - U, \qquad Z = 1 - V, \qquad X + Y + Z = 1.$$

である。変数変換（change of variables）$(u,v) \mapsto (x,y) = (u, v-u)$ のヤコビアン

（Jacobian）は 1 なので、(X, Y) は面積 $\frac{1}{2}$ の三角形

$$T = \{(x, y) : x > 0,\ y > 0,\ x + y < 1\},$$

上で密度 2 をもつ。したがって、以下の確率はどれも T の内部のある**面積の 2 倍**である。

考えてみよう 三角形の各角が弧の π 倍になるのはなぜか？

三角形の R における角は、R を含まない方の弧 PQ に対する円周角である。円周角の定理（inscribed angle theorem）により、それはその弧が中心に張る角の半分である。円周の割合 x にあたる弧は中心に $2\pi x$ の角を張るので、R における角は πx である。各頂点で同じことが成り立つので、PQR の角は $\pi X, \pi Y, \pi Z$ である（そしてその和は当然 π になる）。したがって

$$\text{ある角が次の値を超える：} k\pi \iff \text{対応する弧が次の値を超える：} k.$$

A_X, A_Y, A_Z をそれぞれ事象 $X > k, Y > k, Z > k$ とする。求めたいのは $\mathrm{P}(A_X \cup A_Y \cup A_Z)$ である。

1 つの弧が k を超える場合

$0 \le k \le 1$ のとき：

- A_X は T のうち $x > k$ の部分であり、直角をはさむ 2 辺の長さが $1 - k$ の三角形で、面積は $\frac{1}{2}(1-k)^2$ である。
- A_Y は $y > k$ の部分であり、同じ計算により面積は $\frac{1}{2}(1-k)^2$ である。
- A_Z は $x + y < 1 - k$ の部分であり、直角をはさむ 2 辺の長さが $1 - k$ の隅の三角形で、面積は $\frac{1}{2}(1-k)^2$ である。

2 倍して、$\mathrm{P}(A_X) = \mathrm{P}(A_Y) = \mathrm{P}(A_Z) = (1-k)^2$ を得る。

$\frac{1}{2} \le k \le 1$ の場合

k を超える弧は高々 1 つである。もし 2 つが超えたとすると、その和は $2k \ge 1$ より大きくなるが、3 つの弧の和は 1 だからである。よって事象 A_X, A_Y, A_Z は互いに排反（mutually exclusive）であり、

$$\mathrm{P}(\text{いずれかの角が次の値を超える：} k\pi) = 3(1-k)^2,$$

となって、示すべき式が得られる。

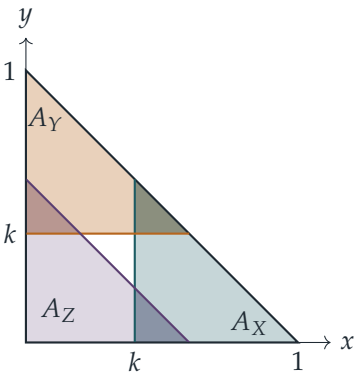
$\frac{1}{3} \le k \le \frac{1}{2}$ の場合

今度は 2 つの弧が同時に k を超えうるので、包除原理（inclusion–exclusion）を用いる。

2 つの弧。 $A_X \cap A_Y$ は T のうち $x > k, y > k, x + y < 1$ の部分である。$x = k + s$, $y = k + t$ と置き換えると、これは $s, t > 0, s + t < 1 - 2k$ となり、直角をはさむ 2 辺の長さが $1 - 2k \ge 0$ で面積が $\frac{1}{2}(1 - 2k)^2$ の三角形である。よって $\mathrm{P}(A_X \cap A_Y) = (1 - 2k)^2$ である。残りの 2 つの組も同じ値を与える。たとえば $A_X \cap A_Z$ は $x > k, y > 0$, $x + y < 1 - k$ であり、これもまた直角をはさむ 2 辺の長さが $1 - 2k$ の三角形である。

3 つの弧。 3 つすべてが k を超えるには $X + Y + Z > 3k \ge 1$ が必要であるが、これは不可能である。よって 3 つの共通部分の確率は 0 である。

下の図は $k = 0.4$ のときの T を示している。3 つの隅の三角形が A_X, A_Y, A_Z であり、色の濃い重なりが 2 つずつの共通部分である。



包除原理により、

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A_X \cup A_Y \cup A_Z) &= 3(1-k)^2 - 3(1-2k)^2 + 0 \\ &= 3\big[(1-k) - (1-2k)\big]\big[(1-k) + (1-2k)\big] \\ &= 3k(2-3k).\end{aligned}$$

したがって $\frac{1}{3} \le k \le \frac{1}{2}$ のとき、少なくとも 1 つの角が $k\pi$ を超える確率は

$$3k(2-3k) = 6k - 9k^2.$$

である。

検算

- $k = \frac{1}{2}$ では両方の式が $\frac{3}{4}$ を与えるので、2 つの式は連続的につながる。これは、ランダムな内接三角形が鈍角三角形（obtuse triangle）になる確率は $\frac{3}{4}$ であるという

古典的な結果である。

- $k = \frac{1}{3}$ では $3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = 1$ を得る。これは正しい。3 つの角の和は π なので、最大の角は常に $\frac{\pi}{3}$ 以上だからである。
- $k = 1$ では 0 を得る。どの角も π を超えることはできないからである。
- 4×10^5 個のランダムな三角形について座標から直接角を計算するシミュレーションを行ったところ、$k = 0.4$ で 0.9602（公式では 0.96）、$k = 0.6$ で 0.4783（公式では 0.48）となった。

よくある間違い

- 3 つ目の頂点を**含まない**方の弧ではなく、弧 PQ 全体を使ってしまう。2 つある弧 PQ のうち、R に向かい合うのは一方だけである。
- X, Y, Z を独立な一様分布として扱ってしまう。これらには $X + Y + Z = 1$ という制約があり、それを正しく扱う方法が面積による見方である。
- $k = \frac{1}{2}$ より小さいところで $3(1-k)^2$ を使ってしまう。$k < \frac{1}{2}$ ではこの式は大きな角を 2 つもつ三角形を二重に数えており、$k = \frac{1}{3}$ では $\frac{4}{3} > 1$ という値を与えてしまう。

STEP のその先へ

弧 (X, Y, Z) は単体（simplex）$x + y + z = 1$ 上に一様に分布する。これはディリクレ分布（Dirichlet distribution）であり、ランダムな点が区間や円を切り分けたときに残る「間隔」（spacings）を記述する。n 個の点の場合も同じ包除原理により $\mathrm{P}(\text{最大の間隔} > k) = \sum_j (-1)^{j+1} \binom{n}{j} (1-jk)_+^{n-1}$ が得られる。この公式は Whitworth にまでさかのぼる。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）には、幾何学的確率と同時密度についての優れた解説がある。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。