解答例

STEP III 1994、第 13 問

確率・統計 ・ 指数分布に従う寿命

> **STEP III 1994、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/94-s3-q13

鍵となる考え方

すべては指数分布に従う寿命の生存関数（survival function）$\mathrm{P}(T > t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$ から導かれる。t_0 まで故障しないという条件のもとでの確率は、このような指数関数どうしの割り算にすぎず、これが有名な**無記憶性**（memoryless property）の由来である。2 本のロープがともに切れるまでの時間は、独立な 2 つの寿命の**最大値**（maximum）であり、最大値が t 以下になるのは、それぞれの寿命が t 以下になるときに限る。そこで、まずその分布関数（distribution function）を求め、それを微分する。最後の小問で「2 本が同じ公演中に切れる」とは、2 本のロープが同じ区間 $((n-1)h,\, nh]$ で切れることを意味し、これを n について足し合わせる。その和は等比級数（geometric series）である。

解答

すでに使用中のロープ

ロープの寿命全体を T とおく。$t \geq 0$ に対して

$$\mathrm{P}(T > t) = \int_t^\infty \lambda \mathrm{e}^{-\lambda u}\, \mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

ロープが t_0 時間もったこと、すなわち $T > t_0$ がわかっている。これからさらにもつ時間を $S = T - t_0$ とおく。$s \geq 0$ に対して、事象 $\{T > t_0 + s\}$ は $\{T > t_0\}$ に含まれるから

$$\mathrm{P}(S > s \mid T > t_0) = \frac{\mathrm{P}(T > t_0 + s)}{\mathrm{P}(T > t_0)} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t_0+s)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t_0}} = \mathrm{e}^{-\lambda s}.$$

したがって、残りの時間 S は $s \geq 0$ で確率密度関数（density）$\lambda e^{-\lambda s}$ をもつ（$s < 0$ では 0）。これは t_0 の値によらず、**同じ**パラメータ λ の指数分布である。

解釈。使用済みのロープは新品とまったく同じだけ信頼できる。ロープは過去の使用を「記憶」しておらず、次の短い時間 δt の間に切れる確率は、どの時点でもおよそ $\lambda\,\delta t$ である（故障率（failure rate）が一定）。これは突然の偶発的な事故による故障には当てはまる。しかし、実際のロープはほつれたり摩耗したりするので現実的ではなく、古いロープほどすぐに切れる可能性が**高い**はずである。故障率が使用時間とともに増加するモデルのほうがよいだろう。このモデルのもとでは違いはないものの、新しいロープにこだわる芸人の姿勢は実際には理にかなっている。

2 本の新しいロープがともに切れるまでの時間

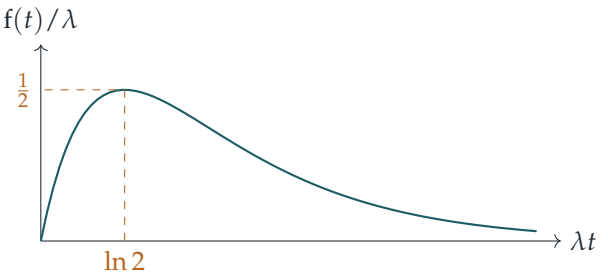
2 本の新しいロープの寿命を T_1, T_2 とする。これらは独立で、それぞれ $t \geq 0$ で分布関数 $P(T_i \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ をもつ。時刻 t までに 2 本とも切れているのは、遅いほうの故障が起きたときに限るから、求める時間は $M = \max(T_1, T_2)$ である。$M \leq t$ となるのは $T_1 \leq t$ **かつ** $T_2 \leq t$ のとき、かつそのときに限るので、独立性より

$$P(M \leq t) = P(T_1 \leq t)\,P(T_2 \leq t) = (1 - e^{-\lambda t})^2 \qquad (t \geq 0),$$

であり、$t < 0$ では $P(M \leq t) = 0$ である。合成関数の微分法（chain rule）を用いて微分すると

$$f(t) = 2(1 - e^{-\lambda t}) \cdot \lambda e^{-\lambda t} = 2\lambda e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t}) \quad (t \geq 0),$$

となり、$t < 0$ では $f(t) = 0$ である。これが示すべきことであった。



1 つの指数分布に従う寿命とは異なり、M の密度は $t = 0$ で 0 である。2 つの故障が開始直後に同時に起こることはありえないからである。密度は $e^{-\lambda t} = \frac{1}{2}$ となるところで最大になる。

2 本のロープがともに第 n 公演中に切れる確率

第 n 公演は、公演時間の区間 $((n-1)h,\, nh]$ である。$q = \mathrm{e}^{-\lambda h}$ とおく。1 本のロープについて

$$\mathrm{P}((n-1)h < T_i \le nh) = \mathrm{e}^{-\lambda(n-1)h} - \mathrm{e}^{-\lambda nh} = q^{n-1}(1-q).$$

考えてみよう $\mathrm{f}(t)$ を第 n 公演の区間で積分すればよいだろうか？

そうではない。$\int_{(n-1)h}^{nh} \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t$ は、**2 本目**の故障が第 n 公演中に起こる確率である。1 本目のロープはそれより前の公演で切れているかもしれない。必要なのは**それぞれの**ロープが第 n 公演中に切れることであり、ロープどうしは独立なので

$$p_n = (q^{n-1}(1-q))^2 = \mathrm{e}^{-2\lambda(n-1)h}(1-\mathrm{e}^{-\lambda h})^2.$$

2 本のロープが同じ公演中に切れる確率

$n = 1, 2, 3, \ldots$ に対する事象「2 本とも第 n 公演中に切れる」は互いに排反であるから、これらを足し合わせればよい。これは公比 $q^2 < 1$ の等比級数である（$\lambda h > 0$ より）：

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = (1-q)^2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{2(n-1)} = \frac{(1-q)^2}{1-q^2} = \frac{1-q}{1+q}.$$

ここで分母と分子に $\mathrm{e}^{\lambda h/2}$ を掛けると

$$\frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda h}}{1+\mathrm{e}^{-\lambda h}} = \frac{\mathrm{e}^{\lambda h/2} - \mathrm{e}^{-\lambda h/2}}{\mathrm{e}^{\lambda h/2} + \mathrm{e}^{-\lambda h/2}} = \tanh\left(\frac{\lambda h}{2}\right),$$

となり、求める結果が得られる。

検算

- $\int_0^{\infty} \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t = \left[(1-\mathrm{e}^{-\lambda t})^2\right]_0^{\infty} = 1$ であるから、f は確かに確率密度関数である。
- 極限：$h \to \infty$（終わりのない 1 回の公演）のとき、答え $\tanh(\lambda h/2) \to 1$ である。$h \to 0$ のときは 0 に近づく。連続な 2 つの寿命が非常に小さな共通の区間に入ることはほとんどないからである。h が小さいとき、答えはおよそ $\lambda h/2$ である。
- 数値的には、$\lambda = 0.7$、$h = 0.8$ のとき、級数と $\tanh(0.28)$ はともに 0.27291 を与える。ロープの組 2×10^5 組のシミュレーションでは 0.2746 となり、$p_1 \approx 0.1839$ もシミュレーション値 0.1848 と一致した。

よくある間違い

- 最大値の代わりに**最小値**を使ってしまう。最小値は 1 **本目**のロープが切れるまでの時間であり、パラメータ 2λ の指数分布に従う。
- p_n を求めるのに f を第 n 公演の区間で積分してしまう。それらの確率を足し合わせると $\tanh(\lambda h/2)$ ではなく 1 になる。

STEP のその先へ

無記憶性は指数分布を特徴づける。すなわち、この性質をもつ連続分布は指数分布だけである。信頼性理論（reliability theory）において、「故障率」（ハザード関数（hazard function））$\mathrm{f}(t)/\mathrm{P}(T > t)$ が一定になるのは指数分布の場合だけである。摩耗は増加するハザードでモデル化され、たとえばワイブル分布（Weibull distribution）が用いられる。独立な確率変数の最大値と最小値は**順序統計量**（order statistics）の両極端の場合であり、大学で最初に学ぶ確率論の講義で出会うことになる。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、これらすべてを扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。