解答例

STEP III 1994、第 12 問

確率・統計 ・ 第一段階解析

> **STEP III 1994、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/94-s3-q12

鍵となる考え方

ゲームを 2 つずつ組にして見る。2 点差はゲーム数が偶数のときにしか生じない。また、2 ゲームを 1 組とすると、各組でどちらの選手もちょうど 1 回ずつサーブ（serve）を担当するので、組が終わるとサーブ権は最初の状態に戻る。すると試合は単純な試行の繰り返しになる。各組は、A が 2 ゲームとも取るか、B が 2 ゲームとも取るか、1 ゲームずつ分け合うかのいずれかであり、分け合った場合は同点の状態に戻る。標準テニス（Standard Tennis）は、最初の 2 組だけを特別に扱った同じ構造である。

解答

以下、全体を通して

$$a = p_A p_B, \qquad b = q_A q_B, \qquad s = p_A q_B + q_A p_B.$$

とおく。各選手が 1 回ずつサーブする連続した 2 ゲームの組において、a は A が 2 ゲームとも取る確率、b は B が 2 ゲームとも取る確率、s は 1 ゲームずつ分け合う確率である（A と B がともにサービスゲームをキープする場合と、ともにブレーク（break）される場合がある）。問題の意図どおり、異なるゲームの結果は互いに独立（independent）であると仮定する。起こりうる結果はこの 3 通りのみであるから、

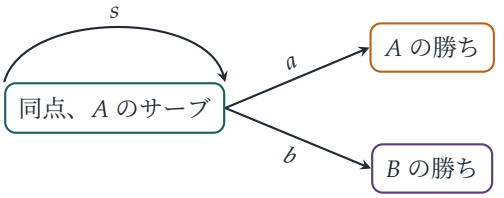
$$a + b + s = (p_A + q_A)(p_B + q_B) = 1.$$

短縮テニス

得点差は 1 ゲームごとに ± 1 だけ変化するので、偶数ゲーム後には偶数、奇数ゲーム後には奇数である。したがって、ちょうど 2 点差が初めて生じうるのは第 $2, 4, 6, \ldots$ ゲ

ームの後に限られ、偶数ゲーム後に試合が続いていれば得点は同点である。

そこで試合を組（第 1–2 ゲーム、第 3–4 ゲーム、…）に分ける。同点で A のサーブから始まるとき、次の組で試合が A の勝ちで終わる確率は a、B の勝ちで終わる確率は b であり、確率 s で再び同点・A のサーブの状態に戻る。このとき状況は最初とまったく同じであるから、



$$P_{\text{short}} = a + sP_{\text{short}} \quad \Longrightarrow \quad P_{\text{short}} = \frac{a}{1-s} = \frac{a}{a+b} = \frac{p_A p_B}{p_A p_B + q_A q_B},$$

となる。ここで $1 - s = a + b$ を用いた。（$1 - s$ で割ってよいのは $s = 1$ でない場合である。$s = 1$ はすべての組が分け合いとなり試合が終わらない退化した場合である。）

B が先にサーブする場合、各組は B のサービスゲームの後に A のサービスゲームが続く形になる。A が 2 ゲームとも取る確率、B が 2 ゲームとも取る確率、分け合う確率はそれぞれ $p_B p_A$、$q_B q_A$、$q_B p_A + p_B q_A$ であり、組の中の 2 ゲームの順序は関係しないので、これらは同じ a、b、s である。同じ議論から同じ答えが得られるので、P_{short} はどちらが先にサーブするかによらない。

4 ゲームで決着する場合

4 ゲームが終わるまでは何も決着しない。4 ゲーム後（2 組、A が先にサーブ）の得点差は偶数であり、試合が決着するのはスコアが 4–0、3–1、1–3、0–4 のときであり、かつそのときに限る。2 つの組を用いて表すと次のようになる。

- A の 4–0：A が両方の組を取る。確率は $a^2 = p_A^2 p_B^2$。
- 0–4：B が両方の組を取る。確率は $b^2 = q_A^2 q_B^2$。
- A の 3–1：A が一方の組を取り、もう一方の組は分け合う。順序は 2 通りあり、確率は $2as$。
- 1–3：同様に $2bs$。

これらを加えて、

$$\Pr(4 \text{ ゲームで決着}) = p_A^2 p_B^2 + q_A^2 q_B^2 + 2(p_A p_B + q_A q_B)(p_A q_B + q_A p_B),$$

となり、求める結果が得られた。

確率が等しい場合の標準テニス

4 ゲームで決着しなければ、スコアは 2–2 である。これが起こる確率は s^2+2ab である（両方の組を分け合うか、各選手が 1 組ずつ取るかで、後者の順序は 2 通り）。2–2 からの「2 点差をつける」という規則は、同点からの短縮テニスの規則とまったく同じであり、第 5 ゲームは A がサーブする。よってそこから A が勝つ確率は P_{short} である。したがって一般に

$$P_{\text{stan}} = a^2 + 2as + (s^2+2ab)P_{\text{short}}.$$

ここで $p_A = p_B = p$、$q_A = q_B = q$ とおくと、$a = p^2$、$b = q^2$、$s = 2pq$、$P_{\text{short}} = \dfrac{p^2}{p^2+q^2}$ である。よって

$$P_{\text{stan}} = p^4 + 4p^3q + \frac{6p^4q^2}{p^2+q^2}.$$

考えてみよう すべてを p と q のべきで展開せずに、P_{stan} と P_{short} を比較する方法はあるだろうか。

ある。短縮テニスを同じ最初の 4 ゲームにわたって展開すればよい。$P_{\text{short}} = a + sP_{\text{short}}$ を 2 回用いると、

$$P_{\text{short}} = a + as + s^2P_{\text{short}}.$$

言葉で言えば、A が第 1 組を取るか、第 1 組を分け合って A が第 2 組を取るか、両方の組を分け合って最初からやり直すか、である。これを P_{stan} の式から引くと、s^2P_{short} の項が打ち消し合う。

$$\begin{aligned} P_{\text{stan}} - P_{\text{short}} &= a^2 + as - a + 2abP_{\text{short}} \\ &= a(a+s-1) + 2abP_{\text{short}} \\ &= -ab + \frac{2a^2b}{a+b} \qquad (a+s-1 = -b \text{ より}) \\ &= \frac{ab(a-b)}{a+b}. \end{aligned}$$

これは任意の p_A、p_B について成り立つ。$a = p^2$、$b = q^2$ とすると、$p+q = 1$ であるから

$$P_{\text{stan}} - P_{\text{short}} = \frac{p^2q^2(p^2-q^2)}{p^2+q^2} = \frac{p^2q^2(p-q)(p+q)}{p^2+q^2} = \frac{p^2q^2(p-q)}{p^2+q^2},$$

となる。これが求める結果である。

その理由は計算の過程に表れている。2 つの形式で結果が異なるのは、A が第 1 組を取り B が第 2 組を取る場合と、その逆の場合だけである。短縮テニスではこの場合、第 1 組を取った方の勝ちとなるが、標準テニスでは 2–2 から試合を続ける。どちらの順序も確率は ab であるから、差は $ab(2P_{\text{short}}-1)$ となり、強い方の選手に有利にはたらく。

検算

- $p = q = \frac{1}{2}$ のとき差は 0 であり、対称性から当然そうなるべきである。実際、どちらの確率も $\frac{1}{2}$ である。
- $p = 0.6$ のとき、$P_{\text{short}} = 0.36/0.52 \approx 0.6923$、$P_{\text{stan}} = 0.1296 + 0.3456 + 0.124416/0.52 \approx 0.7145$ であり、その差 0.02215 は $0.0576 \times 0.2/0.52$ と一致する。
- 4 ゲームで決着する確率 $a^2 + b^2 + 2(a+b)s$ と 2–2 に達する確率 $s^2 + 2ab$ の和は、当然そうなるべきとおり $(a+b+s)^2 = 1$ である。
- 実際の規則をコンピュータでシミュレーションすると、$p_A = 0.7$、$p_B = 0.45$ のとき、どちらが先にサーブしても A が短縮テニスに勝つ割合は約 65.6% となり、$0.315/0.48 = 0.65625$ と一致する。

よくある間違い

- 3–1 が 2 通りの順序（分け合ってから取る、取ってから分け合う）で起こりうることを忘れ、係数 2 を落とす。
- ゲームに勝つ確率をすべてのゲームで同じとして扱う。実際にはどちらがサーブするかによって変わるのであり、だからこそ組にまとめることがこれほど有効なのである。
- 無限等比級数（geometric series）を書き下しながら、それが方程式 $P = a + sP$ にほかならないことに気づかない。

STEP のその先へ

組ごとに考えるこの議論は、吸収状態（absorbing states）をもつ**マルコフ連鎖**（Markov chain）の最初の例であり、方程式 $P = a + sP$ は、吸収確率（absorption probabilities）を求める標準的な方法である第一段階解析（first-step analysis）である。同じ考え方で、テニスの 1 セット全体やスカッシュの 1 ゲームに勝つ確率も求めることができ、さらに破産問題（gambler's ruin）やランダムウォーク（random walk）へとつながっていく。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、ランダムウォークとマルコフ連鎖をちょうどこの水準で展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。