解答例

STEP III 1994、第 11 問

力学 ・ 剛体のつり合い

STEP III 1994、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/94-s3-q11

鍵となる考え方

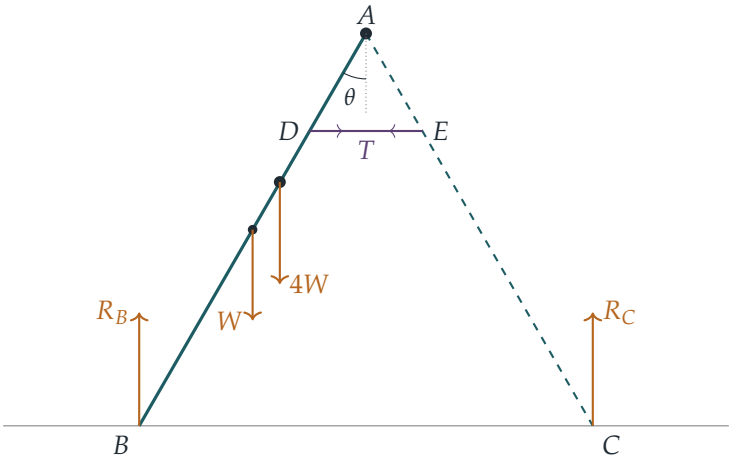
床がなめらか（smooth）なので、床から受ける力は鉛直方向のみである。したがって、脚立全体を考えれば C における抗力（reaction）がすぐに求まる。そのうえで巧妙な働きをするのが軽い脚 AC である。これに働く力は 3 つ（床からの抗力、ロープの張力（tension）、ちょうつがい（hinge）からの力）だけなので、ちょうつがい A のまわりのモーメント（moment）をとれば未知のちょうつがいの力が消え、ロープの張力と C における抗力とが結びつく。フックの法則（Hooke's law）によって張力が脚立の角度と結びつき、その結果 β が角度の関数として表される。これを最大化すればよい。

解答

設定

AB を一様な棒、AC を軽い棒とし、いずれも長さは $4a$ で、A においてなめらかなちょうつがいでつながっているとする。ロープは軽い弾性体とする。人は質点とみなす。対称性（$AD = AE$ かつ $AB = AC$）より、ロープ DE は水平である。各脚が鉛直方向となす角を θ とし、$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。

床がなめらかなので、B と C における抗力 R_B と R_C は鉛直である。AB の重さ W はその中点、すなわち B から水平距離 $2a\sin\theta$ の位置に働き、人の重さ $4W$ は B から水平距離 $\beta a\sin\theta$ の位置に働く。張力 T は D と E を互いに引き寄せる向きに働く。



C における抗力

脚立全体について B のまわりのモーメントをとる（ちょうつがいの力と張力は内力なので現れない）。$BC = 8a\sin\theta$ であるから

$$R_C \cdot 8a\sin\theta = W \cdot 2a\sin\theta + 4W \cdot \beta a\sin\theta \quad \Longrightarrow \quad R_C = \tfrac{1}{4}W(1+2\beta).$$

鉛直方向の力のつりあいより $R_B = 5W - R_C = \frac{1}{4}W(19-2\beta)$ であり、$\beta \le 4$（段は脚立上にある）なのでこれは正である。よって、脚が床から浮き上がることはない。

ロープの張力

ロープの長さは $DE = 2a\sin\theta$、自然長は $\frac{a}{4}$ である。もしロープがたるんでいれば $T = 0$ となり、後で行う AC についての A のまわりのモーメントから $R_C = 0$ が導かれてしまうが、これはありえない。したがってロープは伸びており、$\sin\theta > \frac{1}{8}$ であって、フックの法則より

$$T = \frac{W\left(2a\sin\theta - \frac{a}{4}\right)}{a/4} = W(8\sin\theta - 1).$$

軽い脚 AC のつりあい

考えてみよう なぜ AB ではなく AC だけを取り出して考えるのか。

脚 AC は軽いので、これに働く力は 3 つだけである：C における R_C、E における張力 T、そして A におけるちょうつがいの力である。A のまわりのモーメントをとれば、未知のちょうつがいの力は消える。張力は水平で、A から鉛直方向に深さ $a\cos\theta$ だけ

下の位置に働く。抗力 R_C は鉛直で、A から水平距離 $4a\sin\theta$ の位置に働く。よって

$$R_C \cdot 4a\sin\theta = T \cdot a\cos\theta.$$

R_C と T を代入すると

$$\begin{aligned} &W(1+2\beta)\sin\theta = W(8\sin\theta - 1)\cos\theta, \\ &\text{よって}\quad 1+2\beta = 8\cos\theta - \cot\theta, \\ &\text{したがって}\quad \beta = \tfrac{1}{2}\left(8\cos\theta - \cot\theta - 1\right). \end{aligned}$$

人の各位置 β に対して、つりあいが可能であるのは、この方程式が（$\sin\theta > \frac{1}{8}$ を満たす）解 θ をもつときであり、かつそのときに限る。したがって、β のとりうる最大値は $f(\theta) = 8\cos\theta - \cot\theta$ の最大値から得られる。

最大化

微分すると

$$f'(\theta) = -8\sin\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = \frac{1 - 8\sin^3\theta}{\sin^2\theta}.$$

$\sin\theta$ は $(0, \frac{\pi}{2})$ で増加するので、これは $\sin\theta < \frac{1}{2}$ のとき正、$\sin\theta > \frac{1}{2}$ のとき負である。よって f は $\sin\theta = \frac{1}{2}$、すなわち $\theta = \frac{\pi}{6}$ のとき最大となり、そのとき

$$f\left(\tfrac{\pi}{6}\right) = 8\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} = 3\sqrt{3}, \qquad \beta_{\max} = \tfrac{1}{2}\left(3\sqrt{3} - 1\right) \approx 2.10.$$

これは 4 より小さいので段は脚立上にあり、また $\sin\theta = \frac{1}{2} > \frac{1}{8}$ なので、仮定どおりロープは張っている。

段の高さ

段は B から BA に沿って距離 βa の位置にあり、BA は鉛直方向と角 θ をなすので、その高さは

$$h = \beta a\cos\theta = \tfrac{1}{2}\left(3\sqrt{3} - 1\right) a\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} = \frac{(9-\sqrt{3})\,a}{4} \approx 1.82a.$$

検算

- $\theta = \frac{\pi}{6}$、$W = a = 1$ のとき：$T = 8\cdot\frac{1}{2} - 1 = 3$、$R_C = \frac{1}{4}(1 + 3\sqrt{3} - 1) = \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1.299$ であり、確かに $R_C \cdot 4\sin\theta = 2.598 = T\cos\theta$ となる。
- 両脚それぞれについて力とモーメントの方程式を別々に解き、θ を $(0, \frac{\pi}{2})$ の範囲で走査する数値計算を行ったところ、β の最大値は $\theta \approx 30^\circ$ で 2.09808 となり、高さは $1.81699a$ であった。

- 極限の場合も筋が通っている：$\sin\theta \to \frac{1}{8}$ のときロープはたるみ、β は負でなければならなくなる。また $\theta \to \frac{\pi}{2}$ のときロープのモーメントの腕の長さ $a\cos\theta$ が 0 に近づくので、やはり β は小さくならざるをえない。したがって、その間に最大値があるのは予想どおりである。

よくある間違い

- A におけるちょうつがいの力を水平と考えてしまうこと。2 本の脚にかかる荷重が異なるので、一般には水平ではない。A のまわりのモーメントをとれば、そもそもこの力を求める必要がない。
- ロープの長さ $DE = 2a\sin\theta$ 全体を伸びとしてしまうこと。伸びは $2a\sin\theta - \frac{a}{4}$ である。
- 問われている高さではなく、$\beta_{\max}$（脚立に沿った距離）を答えてしまうこと。高さを求めるには、さらに因子 $a\cos\theta$ が必要である。

STEP のその先へ

これは、配置（θ）が与えられておらず弾性ロープによって決まる静力学（statics）の問題である。そのため、つりあいの位置は 1 パラメータの族をなし、問題はその族の上での最適化となる。大学では、これは仮想仕事（virtual work）の原理やポテンシャルエネルギー（potential energy）を用いる方法の背後にある考え方である。つりあいの位置はポテンシャルエネルギーの停留点であり、どれが安定かを問うことは分岐理論（bifurcation theory）やカタストロフ理論（catastrophe theory）へとつながる。力学をさらに深めるには、Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）がよい出発点である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。