解答例

STEP III 1994、第 10 問

力学 ・ 相対速度

STEP III 1994、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

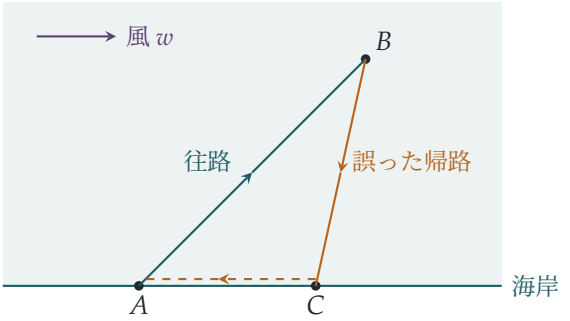
step.maths.org/questions/94-s3-q10

鍵となる考え方

すべてはベクトルの和（vector addition）である。飛行機の地面に対する速度は、その対気速度（air velocity）に風の速度を加えたものである。海岸を x 軸にとり、Alphaport を原点に置き、往路の対気速度を成分で書く。機首方位（heading）を逆にすると対気速度は逆になるが、風は逆に**ならない**。そのため帰路では、運動の北向き成分と東向き成分がまったく異なる振る舞いをする。前半の話はこれに尽きる。後半では、正しい二つの対地速度が同じ二次方程式（quadratic）から得られるので、解と係数の関係（Vieta's formulas）が仕事をしてくれる。

解答

飛行機を、一定の速度 w で真東に動く空気に対して、大きさ v の一定の対気速度で動く質点（particle）としてモデル化する（西**から**の風は東**へ向かって**吹く）。Alphaport A を原点とし、x を東向き、y を北向きにとる。すると海岸は直線 $y = 0$ であり、島は $y > 0$ の側にある。Betaville B は $\left(\frac{d}{\sqrt{2}}, \frac{d}{\sqrt{2}}\right)$ にある。速さの単位は $\mathrm{km\,h^{-1}}$、時間の単位は時間とする。（問題文ではこれらの地名を Alphabet/Alphaport、Betaville/Betaport と呼んでいるが、同じ場所である。）



往路の飛行

往路の対気速度を (a, b) とすると、$a^2 + b^2 = v^2$ である。対地速度（ground velocity）は $(a + w, b)$ であり、これは北東を向かなければならないので、二つの成分は等しく正である：

$$a + w = b > 0.$$

彼女は y 方向の距離 $\frac{d}{\sqrt{2}}$ を y 方向の速さ b で進み、往路の所要時間は t であるから、

$$bt = \frac{d}{\sqrt{2}} = (a + w)t. \tag{1}$$

誤った帰路

機首方位を逆にすると対気速度は $(-a, -b)$ になるが、風は依然として $(w, 0)$ を加えるので、対地速度は

$$(w - a,\ -b).$$

となる。

> **考えてみよう** 彼女はどこで海岸に達するか。それは Alphaport のどちら側か。

北向きの運動は風の影響を受けない。彼女の y 座標は $y = \frac{d}{\sqrt{2}}$ から割合 b で減少するので、(1) より、ちょうど時間 t 後、つまり往路と同じ時間で $y = 0$ に達する。その間に x 座標は $(w - a)t$ だけ変化するので、再び (1) を用いると、彼女が海岸を横切る位置は

$$x = \frac{d}{\sqrt{2}} + (w - a)t = (a + w)t + (w - a)t = 2wt,$$

である。したがって彼女は Alphaport の**東**に距離 $2wt$ の点 C に着く。往路では風が彼女を東へ押し、機首方位はそれを打ち消すように選ばれていた。しかし帰路では機首方位による補正は逆になるのに風による押しは逆にならないので、ずれが 2 倍になる

のである。$2wt > 0$ であるから、海岸に沿って西へ向かうのは確かに正しい方向である。

対気速度 v で向かい風の中を真西へ飛ぶとき、対地速度は $v - w > 0$ である（$v > w$ より）。海岸沿いの区間には $\dfrac{2wt}{v-w}$ かかるので、帰路全体の所要時間は

$$t + \frac{2wt}{v-w} = \frac{(v-w)+2w}{v-w}\,t = \left(\frac{v+w}{v-w}\right) t \text{ 時間,}$$

となり、示すべき結果が得られる。

正しい帰路

直線 AB に沿った対地速度を $\pm(p, p)$ と書く。ここで $\sqrt{2}\,p$ が対地速度の大きさである。対気速度は対地速度から風の速度を引いたものであり、その大きさは v である。

往路では、対地速度は (p_1, p_1)、対気速度は $(p_1 - w,\, p_1)$ であるから

$$(p_1 - w)^2 + p_1^2 = v^2 \iff 2p_1^2 - 2wp_1 + (w^2 - v^2) = 0.$$

帰路では、$p_2 > 0$ として対地速度は $(-p_2, -p_2)$、対気速度は $(-p_2 - w,\, -p_2)$ であるから

$$(p_2 + w)^2 + p_2^2 = v^2 \iff 2(-p_2)^2 - 2w(-p_2) + (w^2 - v^2) = 0.$$

よって p_1 と $-p_2$ はともに同じ二次方程式 $2p^2 - 2wp + (w^2 - v^2) = 0$ の解である。この方程式の解の積は $\frac{w^2-v^2}{2} < 0$ なので、一方は正、他方は負である。p_1 が正の解、$-p_2$ が負の解であるから、これらは相異なる二つの解である。解と係数の関係より

$$p_1 + (-p_2) = w, \qquad p_1(-p_2) = \frac{w^2 - v^2}{2},$$

すなわち $p_1 - p_2 = w$ かつ $p_1 p_2 = \frac{1}{2}(v^2 - w^2)$ である。

距離は往復とも d であるから、往路の所要時間は $t = \dfrac{d}{\sqrt{2}\,p_1}$、正しい帰路の所要時間は $\dfrac{d}{\sqrt{2}\,p_2}$ である。したがって

$$\begin{aligned}\frac{d}{\sqrt{2}\,p_2} &= t + \frac{d}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1}\right) = t + \frac{d}{\sqrt{2}} \cdot \frac{p_1 - p_2}{p_1 p_2} \\ &= t + \frac{d}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2w}{v^2 - w^2} = t + \frac{\sqrt{2}\,wd}{v^2 - w^2} \text{ 時間,}\end{aligned}$$

となり、これが示すべき結果である。

検算

▶ $w = 0$ ならば、どちらの帰路の所要時間も t になる。無風ならそうなるべきである。

- $v = 300$、$w = 60$、$d = 400$ とすると、$t \approx 1.1785\,\mathrm{h}$ であり、誤った帰路（運動を数値的に刻んで追跡して求めた）は $1.7678\,\mathrm{h} = \frac{360}{240}t$、正しい帰路は $1.5713\,\mathrm{h}$ かかり、$t + \frac{\sqrt{2}\cdot 60\cdot 400}{86400}$ と一致する。$v > w$ と d を多数ランダムに選んだ試行でも、丸め誤差の範囲で一致する。
- 誤った帰路は常に正しい帰路より遅い。これは不等式 $\frac{2wt}{v-w} > \frac{\sqrt{2}\,wd}{v^2-w^2}$、すなわち $\sqrt{2}(v+w)t > d$ のことであり、$p_2 < v$ より往路の対地速度 $\frac{d}{t} = \sqrt{2}p_1 = \sqrt{2}(p_2 + w)$ が $\sqrt{2}(v+w)$ より小さいので成り立つ。

よくある間違い

- 対気速度ではなく対地速度を逆にしてしまう。パイロットが向きを変えても、風は向きを変えない。
- 風が西へ向かって吹くと解釈してしまう。「西から」の風は飛行機を東へ運ぶ。
- それぞれの二次方程式を解の公式で解き、煩雑な無理数の逆数どうしを引き算してしまう。p_1 と $-p_2$ が一つの二次方程式の解であることに気づけば、その手間はすべて省ける。

STEP のその先へ

これは最も単純な形の相対速度（relative velocity）である。地面の座標系における飛行機の速度は、空気の座標系における飛行機の速度に空気の速度を加えたものであり、これはガリレイ変換（Galilean change of frame）である。同じ帳簿付けを注意深く行うことが、航法や、大学 1 年の力学で扱う川渡りの問題の基礎になっており、さらに（高速でそれが破綻することが）特殊相対性理論（special relativity）の動機にもなっている。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、運動する座標系を徹底的に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。