解答例

STEP III 1994、第 1 問

純粋数学 ・ 漸化式による積分

> **STEP III 1994、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/94-s3-q1

鍵となる考え方

最初の積分（integral）では、$\operatorname{sech} t$ を $\dfrac{\cosh t}{\cosh^2 t} = \dfrac{\cosh t}{1+\sinh^2 t}$ と書き直す。分子は $\sinh t$ の導関数（derivative）であるから、これは姿を変えた arctan である。漸化式（reduction formula）については、$\tanh t$ の導関数である $\operatorname{sech}^2 t$ を因子として切り離し、部分積分（integration by parts）を行うのが自然な方針である。すると恒等式 $\tanh^2 t = 1 - \operatorname{sech}^2 t$ によって右辺に I_n が再び現れるので、それを左辺にまとめればよい。

解答

$\operatorname{sech} t$ の積分

分子と分母に $\cosh t$ を掛け、$\cosh^2 t = 1 + \sinh^2 t$ を用いると、

$$\int_0^x \operatorname{sech} t \,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\cosh t}{1+\sinh^2 t}\,\mathrm{d}t.$$

$s = \sinh t$ とおくと $\mathrm{d}s = \cosh t \,\mathrm{d}t$ であり、積分区間の端は 0 と $\sinh x$ になるから、

$$\int_0^x \operatorname{sech} t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\sinh x} \frac{\mathrm{d}s}{1+s^2} = \arctan(\sinh x).$$

同様に有効な別の方法として、$\operatorname{sech} t = \dfrac{2\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^{2t}+1}$ と書いて $u = \mathrm{e}^t$ とおくものがあり、このとき答えは $2\arctan(\mathrm{e}^x) - \frac{\pi}{2}$ の形で得られる。両者は一致する。実際、どちらも $x = 0$ で 0 になり、導関数はともに $\operatorname{sech} x$ である。（この x の関数は**グーデルマン関数**（Gudermannian）と呼ばれる。）

漸化式

$n \geq 2$ とし、$\operatorname{sech}^n t = \operatorname{sech}^{n-2} t \cdot \operatorname{sech}^2 t$ と書く。

$$u = \operatorname{sech}^{n-2} t, \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \operatorname{sech}^2 t,$$

として部分積分を行う。すると $v = \tanh t$ であり、合成関数の微分法（chain rule）により（$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{sech} t = -\operatorname{sech} t \tanh t$ を用いて）

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = (n-2)\operatorname{sech}^{n-3} t \cdot (-\operatorname{sech} t \tanh t) = -(n-2)\operatorname{sech}^{n-2} t \tanh t.$$

したがって

$$\begin{aligned} I_n &= \Big[\operatorname{sech}^{n-2} t \tanh t\Big]_0^x + (n-2)\int_0^x \operatorname{sech}^{n-2} t \tanh^2 t \,\mathrm{d}t \\ &= \operatorname{sech}^{n-2} x \tanh x + (n-2)\int_0^x \operatorname{sech}^{n-2} t \,(1 - \operatorname{sech}^2 t)\,\mathrm{d}t \\ &= \operatorname{sech}^{n-2} x \tanh x + (n-2) I_{n-2} - (n-2) I_n, \end{aligned}$$

ここで、$\tanh 0 = 0$ であるから 0 における境界項（boundary term）は消える。

考えてみよう 堂々巡りになったように見える。右辺に I_n が再び現れたのである。これは問題だろうか？

まったく問題ない。むしろ、これこそ望んでいた形である。右辺の I_n の係数は $+1$ ではなく $-(n-2)$ であるから、これを左辺に移項すると $(n-1)I_n$ となり、$n - 1 \neq 0$ で割ることができる。漸化式は

$$\boxed{(n-1) I_n = \operatorname{sech}^{n-2} x \tanh x + (n-2)\, I_{n-2} \qquad (n \geq 2).}$$

I_5 を求める

奇数番目の系列は $I_1 = \arctan(\sinh x)$ から始まる。$n = 3$ とおくと、

$$2I_3 = \operatorname{sech} x \tanh x + I_1, \qquad \text{よって} \qquad I_3 = \tfrac{1}{2}\operatorname{sech} x \tanh x + \tfrac{1}{2}\arctan(\sinh x).$$

$n = 5$ とおくと、

$$4I_5 = \operatorname{sech}^3 x \tanh x + 3I_3,$$

よって

$$I_5 = \tfrac{1}{4}\operatorname{sech}^3 x \tanh x + \tfrac{3}{8}\operatorname{sech} x \tanh x + \tfrac{3}{8}\arctan(\sinh x).$$

I_6 を求める

偶数番目の系列は $I_0 = \int_0^x 1\,\mathrm{d}t = x$ から始まるが、より直接には $I_2 = \int_0^x \operatorname{sech}^2 t\,\mathrm{d}t = \tanh x$ から始めてもよい（$n = 2$ としたときの公式もこれを裏づける：$I_2 = \tanh x + 0$）。

$n = 4$ とおくと、

$$3I_4 = \operatorname{sech}^2 x \tanh x + 2I_2, \qquad \text{よって} \qquad I_4 = \tfrac{1}{3}\operatorname{sech}^2 x \tanh x + \tfrac{2}{3}\tanh x.$$

$n = 6$ とおくと、

$$5I_6 = \operatorname{sech}^4 x \tanh x + 4I_4,$$

よって

$$I_6 = \tfrac{1}{5}\operatorname{sech}^4 x \tanh x + \tfrac{4}{15}\operatorname{sech}^2 x \tanh x + \tfrac{8}{15}\tanh x.$$

偶数乗に対する「別解」

偶数乗には、より簡潔な直接的方法がある。$u = \tanh t$ とおくと $\mathrm{d}u = \operatorname{sech}^2 t \,\mathrm{d}t$ かつ $\operatorname{sech}^2 t = 1 - u^2$ であるから、

$$I_6 = \int_0^x (\operatorname{sech}^2 t)^2 \operatorname{sech}^2 t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\tanh x} (1-u^2)^2 \,\mathrm{d}u = \tanh x - \tfrac{2}{3}\tanh^3 x + \tfrac{1}{5}\tanh^5 x.$$

先に得た答えにおいて $\operatorname{sech}^2 x$ を $1 - \tanh^2 x$ に置き換えて展開すると、ちょうどこの式になるので、二つの形は一致する。

検算

- $x \to \infty$ のとき $\tanh x \to 1$、$\operatorname{sech} x \to 0$、$\arctan(\sinh x) \to \frac{\pi}{2}$ であるから、$I_5 \to \frac{3\pi}{16} \approx 0.58905$、$I_6 \to \frac{8}{15}$ となる。区間 $[0, 30]$ でシンプソンの公式（Simpson's rule）を用いると 0.589049 と 0.533333 が得られる。
- $x = 1$ において、シンプソンの公式から $I_5 \approx 0.561566$、$I_6 \approx 0.518343$ が得られ、公式と一致する。また、$2 \le n \le 8$ について、x の無作為な 200 個の値で漸化式を確かめた。
- sech は偶関数であるから、I_5 と I_6 はともに x の奇関数（odd function）でなければならず、実際そうなっている。

よくある間違い

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{sech} t$ の符号を誤ること。正しくは $-\operatorname{sech} t \tanh t$ であり、このマイナス符号のおかげで境界項が正になる。
- 二つの I_n をまとめた後、$n-1$ ではなく n で割ってしまうこと。
- 答えを不定積分（indefinite integral）のままにしてしまうこと。積分区間が 0 から x であるから任意定数は現れず、どの項も $x = 0$ で 0 にならなければならない。

STEP のその先へ

このような漸化式を用いると、積分の族全体を再帰的に計算できる。同じ考え方は $\int_0^{\pi/2} \sin^n t \, \mathrm{d}t$ に対するウォリス（Wallis）の公式の根底にもあり、そこから π を表す有名な無限積が導かれる。ここで求めた極限 $\int_0^{\infty} \operatorname{sech}^n t \, \mathrm{d}t$ はベータ関数（Beta function）の値であり、ベータ関数は大学 1 年次の解析学や確率論で中心的な役割を果たす対象である。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics* には漸化式の演習がさらに多く収められており、Abbott の *Understanding Analysis* では広義積分（improper integral）が厳密に扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。