解答例

STEP II 1994、第 9 問

力学 ・ 剛体のつり合い

> **STEP II 1994、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q9

鍵となる考え方

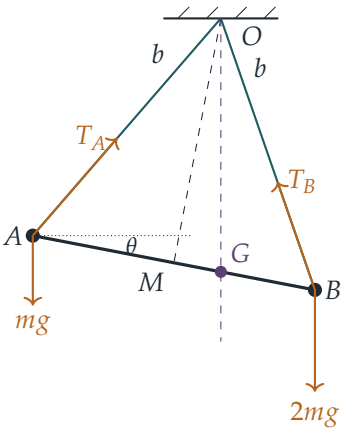
棒、2 本の糸、2 つの質点をまとめて 1 つの剛体（rigid body）とみなす。これにはたらく外力は 2 つの重力と O における支持力だけであるから、つり合い（equilibrium）のためには、重心（centre of mass）G にはたらく合成された重力の作用線が O を通らなければならない。すなわち、G は O の鉛直真下にぶら下がる。これにより、角度の問題は二等辺三角形の純粋な幾何に帰着する。張力（tension）については B のまわりのモーメント（moment）をとる。そうすれば B にはたらく 2 つの未知の力がともに消える。

解答

モデル化。棒と糸は軽く、糸は伸び縮みせず、A、B は質点とする。$OA = OB = b$ かつ $AB = 2a$ であるから、三角形 OAB は二等辺三角形（isosceles triangle）である。AB の中点を M とすると、$OM \perp AB$ であり、ピタゴラス（Pythagoras）の定理より

$$OM = h = \sqrt{b^2 - a^2}.$$

重いほうの質点 B のほうが低い位置にぶら下がり、棒は水平と角 θ をなす。



角度

棒、糸、質点をまとめた系全体を考える。これにはたらく外力は、A における重力 mg、B における重力 $2mg$、そして O における支持力である。O のまわりのモーメントをとると、支持力はモーメントをもたないので、O のまわりの重力のモーメントの和は 0 でなければならない。2 つの重力は平行であるから、質点系の重心 G を通る 1 つの力 $3mg$ に合成される。その O のまわりのモーメントが 0 になるのは、G が O を通る鉛直線上にあるときに限る。したがって G は O の真下にある。

次に G を求める。これは AB 上にあって $AG : GB = 2m : m = 2 : 1$ を満たすから、$AG = \frac{2}{3} \cdot 2a = \frac{4a}{3}$ であり、したがって

$$MG = AG - AM = \frac{4a}{3} - a = \frac{a}{3},$$

となる。ここで G は M から見て B の側にある。

考えてみよう 角 MOG が θ に等しいのはなぜか？

OG は鉛直であり、OM は棒に垂直である。鉛直方向を OM に重ねる回転は、水平方向を棒に重ねる回転と同じであるから、OG と OM のなす角は棒と水平のなす角、すなわち θ に等しい。

三角形 OMG は M で直角であるから

$$\tan\theta = \frac{MG}{OM} = \frac{a/3}{\sqrt{b^2 - a^2}} = \frac{a}{3\sqrt{b^2 - a^2}},$$

となり、題意が示された。

AO の張力

再び棒と質点をまとめて考える。この系にはたらく力は、AO に沿った T_A、BO に沿った T_B、そして 2 つの重力である。（棒にはたらく力は内力である。）B のまわりのモーメントをとると、T_B と重力 $2mg$ が消える。

B から直線 OA に下ろした垂線の長さは、三角形 OAB の面積の 2 倍を OA で割ったものである。その面積は $\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot h = ah$ であるから、垂線の長さは $2ah/b$ である。A における重力 mg の腕の長さ（moment arm）は A と B の水平距離、すなわち $2a\cos\theta$ である。2 つのモーメントは向きが逆であり、それらをつり合わせると

$$T_A \cdot \frac{2ah}{b} = mg\cdot 2a\cos\theta \quad\Longrightarrow\quad T_A = \frac{mgb\cos\theta}{h}.$$

θ は鋭角であるから、$\tan\theta = \dfrac{a}{3h}$ より $\cos\theta = \dfrac{3h}{\sqrt{9h^2+a^2}}$ であり、また $9h^2+a^2 = 9b^2-8a^2$ である。よって

$$T_A = \frac{mgb}{h}\cdot\frac{3h}{\sqrt{9b^2-8a^2}} = \frac{3mgb}{\sqrt{9b^2-8a^2}}.$$

（A のまわりのモーメントをとって同様に議論すると $T_B = 2T_A$ が得られる。各糸の張力は、その糸が支える質量に比例するのである。）

検算

- $a\to 0$ とすると糸は鉛直になり、$T_A \to 3mgb/(3b) = mg$ となる。これはちょうど質点 A を支えるのに必要な大きさである。
- 系全体について鉛直方向に力を分解すると $3mg$ になるはずである。$a=1$、$b=2$、$m=1$、$g=9.8$ とすると $T_A \approx 11.11\,\mathrm{N}$、$T_B \approx 22.22\,\mathrm{N}$ を得る。これらを糸の方向に沿って分解すると、鉛直成分の合計は $29.4\,\mathrm{N} = 3mg$ となる。
- 数値的な検証として、ランダムに選んだ 2000 組の (a,b,m) について棒を予測された角度に置き、各質点での力のつり合いを別々に解いた。2 つの質点から求めた棒の力は一致し、それは押す力（thrust）であった。また、張力は公式と約 10^{-15} の精度で一致した。

よくある間違い

- G を M から距離 $\frac{2a}{3}$ の位置に置いたり、逆の側に置いたりする。重心は重いほうの質点に近く、中点から $\frac{a}{3}$ の位置にある。

- B のまわりの T_A の腕の長さを $2a$ や b としてしまう。必要なのは B から直線 OA に下ろした垂線の長さである。
- 答えは m、g、a、b で表すよう求められているのに、θ を含んだまま答えてしまう。

STEP のその先へ

1 点から自由にぶら下がった物体は、その点の真下に重心が来る位置で静止する。この原理は、より深い事実の最も簡単な場合である。すなわち、安定なつり合いは位置エネルギー（potential energy）を最小にするのであり、ここでは位置エネルギーはちょうど G の高さの $3mg$ 倍である。大学では、これは仮想仕事の原理（virtual work principle）やラグランジュ（Lagrange）力学へと発展し、そこではつり合いの位置を、力を分解するのではなくエネルギーを微分することによって求める。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体の静力学とエネルギー法を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。