解答例

STEP II 1994、第 8 問

純粋数学 • 2 次モデルの最適化

> **STEP II 1994、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q8

鍵となる考え方

1 回の配送サイクルにおけるお金の流れを追ってみよう。在庫は一定の速さ r で減り、やがて尽きるので、$S(t)$ は単純な一次関数のグラフ（傾斜）となり、保管料はその下の面積の b 倍である。すると 1 サイクルあたりの利益は X の 2 次式（quadratic）になる。これを許される範囲 $0 < X \leq rT$ で最大化すれば条件が得られる。そして仮定 $T \geq p/b$ こそが、放物線の頂点（vertex）をその範囲の内側に収める役割を果たしているのである。

解答

なぜ $X \leq rT$ なのか

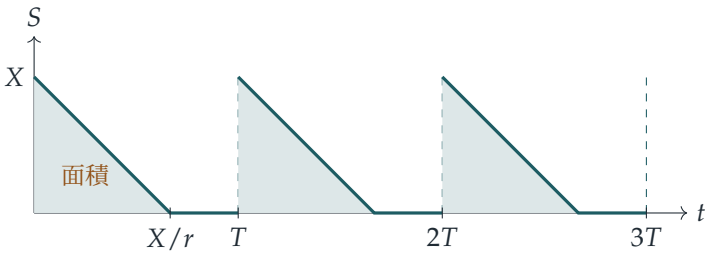
T 時間で彼女が売ることのできる量は高々 rT 個である。もし $X > rT$ ならば、次のトラックが到着した時点で少なくとも $X - rT$ 個が棚に残っている。するとサイクルごとに、この売れ残りの余剰に少なくとも $X - rT$ 個ずつが加わるので、n サイクル後には少なくとも $n(X - rT)$ 個になる。これは限りなく大きくなり、1 個 1 時間あたり b の保管料も同様に限りなく大きくなる。彼女はこれらの商品の代金（およびその保管料）を支払うが、売上はどのみち 1 サイクルあたり rT 個が上限なので、これらの商品は売上を少しも増やさない。したがって、1 回の配送で rT 個より多く注文しても費用が増えるだけであり、$X \leq rT$ とすべきである。

在庫量

$X \le rT$ のとき、各サイクルはちょうど X 個の在庫から始まる。連続モデルでは、在庫がある間は速さ r で売れるので、

$$S(t) = \begin{cases} X - rt, & 0 \le t \le X/r, \\ 0, & X/r \le t \le T. \end{cases}$$

グラフは X から $t = X/r$ でゼロまで下がる直線であり、その後は次の配送時刻 $t = T$ までゼロのまま平らである（その時刻に X まで跳ね上がる）。複数のサイクルにわたって見ると、のこぎり波（sawtooth）の形になる。



1 サイクルあたりの利益

T 時間の 1 周期について考える。

- **売上。**（$X \le rT$ なので）X 個すべてが 1 個 £$(p+q)$ で売れ、売上は £$(p+q)X$ となる。
- **配送費。** £$(a+qX)$。
- **保管料。** $S(t)$ 個を短い時間 δt だけ保管する費用は $bS(t)\,\delta t$ なので、合計は

$$b\int_0^T S(t)\,\mathrm{d}t = b\int_0^{X/r} (X - rt)\,\mathrm{d}t = b \cdot \tfrac{1}{2} \cdot X \cdot \frac{X}{r} = \frac{bX^2}{2r},$$

  すなわち網掛けした三角形の面積の b 倍である。
- **運営費。** £cT。

qX の項は打ち消し合うので、1 サイクルあたりの利益は

$$P(X) = pX - \frac{bX^2}{2r} - a - cT.$$

したがって、p が各商品の実質的な利幅であり、q は単に顧客に転嫁されているだけである。

事業が利益を生むのはどのようなときか

T を固定すると、彼女が調整できるのは範囲 $0 < X \le rT$ における X である。平方完成（completing the square）すると、

$$P(X) = \frac{p^2 r}{2b} - a - cT - \frac{b}{2r}\left(X - \frac{pr}{b}\right)^2.$$

考えてみよう 最適な X は本当に許される範囲にあるだろうか？

放物線は $X = pr/b$ で最大となり、$pr/b \le rT$、すなわち $T \ge p/b$ が必要である。これはまさに仮定そのものである。よって彼女は $X = pr/b$ を選ぶことができ、そのとき

$$P = \frac{p^2 r}{2b} - (a + cT).$$

これが正となるのは、ちょうど $p^2 r > 2b(a + cT)$ のとき、すなわち

$$p^2 > 2\,\frac{(a + cT)b}{r}.$$

のときである。したがって、この不等式が成り立つならば、注文量 $X = pr/b$ によって事業は利益を生む。これが示すべきことであった。（実際には pr/b が最適な選択なので、$T \ge p/b$ のとき、この条件は必要条件でもある。）

逆に $T < p/b$ ならば、頂点は rT より先にある。このとき P は許される範囲全体で増加し、最善の選択は $X = rT$ となる。この特定の条件に T に関する仮定が必要なのはこのためである。

検算

- $a = 10, b = 1, r = 10, p = 4, c = 1, T = 5$ とする。このとき $T \ge p/b = 4$ であり、$p^2 = 16 > 2(15)(1)/10 = 3$ である。最適な注文量は $X = 40 \le rT = 50$ で、利益は $160 - 10 - 80 - 5 = 65 = \frac{16 \cdot 10}{2} - 15$ となる。
- コンピュータで 30 組の無作為なパラメータについて $S(t)$ を 1 サイクル分数値的に追跡したところ、$P(X)$ と 10^{-7} 以内で一致した。また、$T \ge p/b$ を満たす 2000 個の無作為な場合について X のグリッド探索を行い、最大値が $\frac{p^2 r}{2b} - a - cT$ であることを確認した。
- 単位：$p^2 r/b$ の単位は $(£/個)^2 \times (個/時)/(£/個/時) = £$ であり、a と cT も同じである。

よくある間違い

- 実際に保有している在庫に対する $b\int S\,\mathrm{d}t$ ではなく、X 個すべてに T 時間ずっと保管料をかけてしまう（bXT）。
- $X = pr/b$ が $X \leq rT$ を満たすことの確認を忘れる。条件 $T \geq p/b$ が使われるのは、この確認の部分だけである。

STEP のその先へ

これはオペレーションズ・リサーチ（operations research）における古典的な**経済的発注量**（economic order quantity）モデルである。1 回の注文あたりの固定費と、単位時間あたりの保管費とを釣り合わせると、平方根の公式が得られる。ここで、もし彼女が T も選べるならば、利益の率 P/T は a と保管料とのトレードオフによって最大化される。この種の制約付き最適化（constrained optimisation）（ここでは頂点か境界 $X = rT$ か）は、線形計画法（linear programming）や非線形計画法（nonlinear programming）、そしてカルーシュ・キューン・タッカー条件（Karush–Kuhn–Tucker conditions）へと発展していく。このようなモデルを組み立てて検証する習慣を身につけるには、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）がよい相棒となる。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。