解答例

STEP II 1994、第 7 問

純粋数学 • アポロニウスの円

> **STEP II 1994、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q7

鍵となる考え方

高さ h のポールの先端を距離 r から見たときの仰角（angle of elevation）の正接は h/r である。したがって「仰角が等しい」という条件は、兵士から 2 本のポールの根元までの距離の比が一定値 $h_1 : h_2$ であるということにほかならない。この条件を 2 乗すると、ちょうど最初の小問の形の方程式が得られるので、軌跡（locus）は円（アポロニウスの円（circle of Apollonius））である。最後の小問では、ポールを一般の位置に置き、各中心を 2 本のポールの根元の重み付きの組合せとして表す。すると恒等式は自然に導かれ、しかもその係数の和が 0 になる。これが 3 点が一直線上にある（共線（collinear）である）ことを導く鍵である。

解答

円

$a > 0$ であるから a で割ることができ、平方完成（completing the square）すると

$$x^2 + y^2 + \frac{2g}{a}x + \frac{2f}{a}y + \frac{c}{a} = 0 \iff \left(x + \frac{g}{a}\right)^2 + \left(y + \frac{f}{a}\right)^2 = \frac{g^2 + f^2 - ac}{a^2}.$$

$f^2 + g^2 > ac$ より右辺は正であるから、これは

$$\text{中心} \left(-\frac{g}{a}, -\frac{f}{a}\right), \qquad \text{半径} \frac{\sqrt{g^2 + f^2 - ac}}{a}.$$

の円である。（この条件がなければ、「円」は 1 点になるか空集合になる。）

2 本の旗竿

高さ h_1 のポールの根元を原点に、もう一方の根元を $(d,0)$ に置く。兵士が (x,y) にいて、2 本の根元からの距離がそれぞれ r_1, r_2 であるとすると、仰角 θ_1, θ_2 は $\tan\theta_i = h_i/r_i$ を満たす。どちらの角も $(0, \frac{\pi}{2})$ にあり、そこで tan は一対一（one-to-one）であるから

$$\theta_1 = \theta_2 \iff \frac{h_1}{r_1} = \frac{h_2}{r_2} \iff h_2^2 r_1^2 = h_1^2 r_2^2$$

となる。すべての量が正なので、最後の変形は逆向きにもたどれる。（兵士がポールの根元に立つことはない。$r_1 = 0$ ならば $r_2 = 0$ でもなければならないからである。）よって経路は

$$h_2^2(x^2+y^2) = h_1^2((x-d)^2+y^2) \iff (h_2^2 - h_1^2)(x^2+y^2) + 2h_1^2 d\,x - h_1^2 d^2 = 0.$$

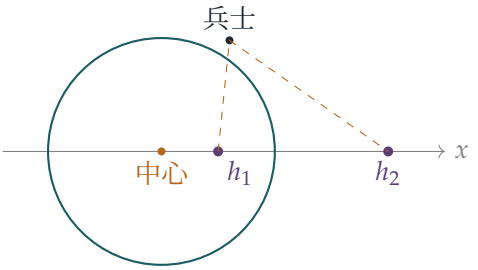
である。$h_2 > h_1$ となるようにポールに名前をつける（高さが異なれば、どちらかが高い）。するとこれは最初の小問の方程式で

$$a = h_2^2 - h_1^2 > 0, \quad g = h_1^2 d, \quad f = 0, \quad c = -h_1^2 d^2,$$

としたものであり、

$$g^2 + f^2 - ac = h_1^4 d^2 + (h_2^2 - h_1^2) h_1^2 d^2 = h_1^2 h_2^2 d^2 > 0.$$

である。したがって兵士は、中心 $\left(-\dfrac{h_1^2 d}{h_2^2 - h_1^2}, 0\right)$、半径 $\dfrac{h_1 h_2 d}{h_2^2 - h_1^2}$ の円を一周する。中心は 2 本の根元を通る直線上で、低いポールの向こう側にある。円は低いポールのまわりを回るが、これは理にかなっている。低いポールを高いポールと同じ高さに見せるには、低いポールの近くに立たなければならないからである。



（$h_1 = 1, h_2 = 2, d = 3$ の場合の図。中心は $(-1,0)$、半径は 2 である。）

$h_1 = h_2$ の場合は $x^2 + y^2$ の項が打ち消し合い、方程式は $2h_1^2 d\,x = h_1^2 d^2$、すなわち $x = \frac{1}{2}d$ となる。兵士は 2 本の根元を結ぶ線分の垂直二等分線（perpendicular bisector）に沿って歩く。これは円ではなく直線である。これは上の円の極限になっている。$h_2 \to h_1$ のとき半径は無限大に発散する。

3 本の旗竿

今度は 3 本の根元をすべて 1 本の軸上に置くことはできないので、高さ h_i のポールが $\mathbf{p}_i = (p_i, q_i)$ に立っているとする。$r_i^2 = (x-p_i)^2 + (y-q_i)^2$ として上の議論を繰り返すと、ポール i と j を担当する兵士は

$$(h_j^2 - h_i^2)(x^2+y^2) - 2(h_j^2 p_i - h_i^2 p_j)x - 2(h_j^2 q_i - h_i^2 q_j)y + \text{定数} = 0.$$

に沿って歩く。これは円である（原点を移動しても g^2+f^2-ac の値は変わらないので、$h_j < h_i$ のときは全体に -1 を掛けたうえで、やはり $h_i^2 h_j^2 |\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j|^2 > 0$ となる）。最初の小問により、その中心 $\mathbf{c}_{ij} = (x_{ij}, y_{ij})$ は

$$(h_j^2 - h_i^2)\,\mathbf{c}_{ij} = h_j^2 \mathbf{p}_i - h_i^2 \mathbf{p}_j.$$

を満たす。この式は i と j を入れ替えても変わらない（両辺とも符号が変わる）ので、$\mathbf{c}_{31}$ をどちら向きに名づけるかは問題にならない。

> **考えてみよう** 何も解かずに、これらの式を 3 つ使って与えられた恒等式を導くにはどうすればよいか。

恒等式の各項にはすでに x_{ij} の隣に因数 $\pm(h_j^2 - h_i^2)$ があるので、上の式をそのまま代入できる。x 座標と y 座標を同時に扱うためにベクトル（vector）を用いると

$$\begin{aligned}
h_3^2(h_1^2 - h_2^2)\,\mathbf{c}_{12} &= -h_3^2(h_2^2\mathbf{p}_1 - h_1^2\mathbf{p}_2) = -h_2^2 h_3^2\,\mathbf{p}_1 + h_1^2 h_3^2\,\mathbf{p}_2,\\
h_1^2(h_2^2 - h_3^2)\,\mathbf{c}_{23} &= -h_1^2(h_3^2\mathbf{p}_2 - h_2^2\mathbf{p}_3) = -h_1^2 h_3^2\,\mathbf{p}_2 + h_1^2 h_2^2\,\mathbf{p}_3,\\
h_2^2(h_3^2 - h_1^2)\,\mathbf{c}_{31} &= \quad h_2^2(h_3^2\mathbf{p}_1 - h_1^2\mathbf{p}_3) = \quad h_2^2 h_3^2\,\mathbf{p}_1 - h_1^2 h_2^2\,\mathbf{p}_3.
\end{aligned}$$

これらを加えると、すべての項が 2 つずつ打ち消し合うので

$$h_3^2(h_1^2 - h_2^2)\,\mathbf{c}_{12} + h_1^2(h_2^2 - h_3^2)\,\mathbf{c}_{23} + h_2^2(h_3^2 - h_1^2)\,\mathbf{c}_{31} = \mathbf{0}.$$

となる。x 成分が求める x_{ij} の間の関係式であり、y 成分は y_{ij} の間の同じ関係式である。

> **考えてみよう** 3 点の間に線形関係があると、なぜそれらは一直線上にあるのか。

3 つの係数を $A = h_3^2(h_1^2 - h_2^2), B = h_1^2(h_2^2 - h_3^2), C = h_2^2(h_3^2 - h_1^2)$ とおく。高さは正で互いに異なるので、A, B, C はどれも 0 でない。鍵となる追加の事実は、これらの和が 0 になることである：

$$A + B + C = h_1^2 h_3^2 - h_2^2 h_3^2 + h_1^2 h_2^2 - h_1^2 h_3^2 + h_2^2 h_3^2 - h_1^2 h_2^2 = 0.$$

よって $C = -A - B$ であり、関係式は

$$A(\mathbf{c}_{12} - \mathbf{c}_{31}) + B(\mathbf{c}_{23} - \mathbf{c}_{31}) = \mathbf{0}, \qquad \text{よって} \qquad \mathbf{c}_{12} - \mathbf{c}_{31} = -\frac{B}{A}(\mathbf{c}_{23} - \mathbf{c}_{31}).$$

となる。$\mathbf{c}_{31}$ から他の 2 つの中心へ向かうベクトルは平行である（2 つの中心が一致する場合は一方が零ベクトルになる）から、3 つの中心は一直線上にある。$A + B + C = 0$ がなければ、線形関係からは何も証明できない。どんな 3 点も、その種の関係を何かしら満たすからである。

検算

- $h_1 = 1, h_2 = 2, d = 3$ のとき、得られた式から中心は $(-1, 0)$、半径は 2 となる。点 $(1, 0)$ は根元からの距離が 1 と 2 であり、$(-3, 0)$ は 3 と 6 である。どちらも比は 1 : 2 で、そうなるべきとおりである。
- 数値的な検証として、各円上にランダムな点をとり、2 つの仰角が一致することを確かめた。また、ランダムな位置に置いたポールの 3 本組 2000 通りについて、恒等式と 3 つの中心の共線性も確かめた。
- 共線性を予想できる別の理由：ある点が 2 つの円の上にあれば $r_1 : r_2 = h_1 : h_2$ かつ $r_2 : r_3 = h_2 : h_3$ であるから、$r_1 : r_3 = h_1 : h_3$ となり、その点は 3 つ目の円の上にもある。円どうしが交わるとき、すべての円が同じ 2 点を通るので、それらの中心はすべてその 2 点の垂直二等分線上にある。

よくある間違い

- 等しい角の正接が等しい理由（どちらの角も鋭角であること）を述べずに $h_1/r_1 = h_2/r_2$ とおいてしまう。
- $g^2 + f^2 > ac$ の確認を忘れる。最初の小問で円が得られるのは、この条件のもとでだけである。
- $A + B + C = 0$ と $A, B, C \neq 0$ を使わずに、恒等式だけから共線性を導いてしまう。

STEP のその先へ

2 つの定点からの距離の比が一定値 $k \neq 1$ である点の集合は**アポロニウスの円**である。k のすべての値をとると、円の**共軸円族**（coaxal system）が得られる。これは、どの 2 つの円も同じ根軸（radical axis）を共有するような円の族である。このような族は反転幾何学（inversive geometry）の出発点であり、複素平面ではこれらは円

$|z-a|=k|z-b|$ となり、メビウス（Möbius）変換によって互いに写り合う。コクセター（Coxeter）とグライツァー（Greitzer）の *Geometry Revisited*（幾何学再入門）は共軸円と反転を扱っている。ニーダム（Needham）の *Visual Complex Analysis*（目で見る複素解析）は複素数の側面を示している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。