解答例

STEP II 1994、第 6 問

純粋数学 • 望遠鏡型の三角級数

> **STEP II 1994、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q6

鍵となる考え方

すべては一つの小さな恒等式（identity）$\tan x = \cot x - 2\cot 2x$ に基づいている。この恒等式により、和の各項は $\frac{1}{2^r}\cot\frac{\theta}{2^r}$ という形の連続する 2 項の差に書き換えられるので、和は打ち消し合って縮む（telescope）。そしてこの同じ恒等式こそが、帰納法のステップ（inductive step）を成り立たせるものである。無限級数のほうは、極限 $\frac{\sin\varphi}{\varphi} \to 1$ さえあれば求まる。

解答

有用な恒等式

$\sin x$、$\cos x$、$\sin 2x$ がいずれも 0 でないような任意の x に対して

$$\cot x - \tan x = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{\cos 2x}{\frac{1}{2}\sin 2x} = 2\cot 2x,$$

であるから

$$\tan x = \cot x - 2\cot 2x. \qquad (*)$$

が成り立つ。$(*)$ は $r \geq 1$ について $x = \theta/2^r$ とした場合にのみ用いる。$0 < \theta < \pi$ であるから、このような x は $(0, \frac{\pi}{2})$ に属し、$\sin x$、$\cos x$、$\sin 2x$ はすべて正である。よって、以下に現れる tan と cot はすべて定義されている。

有限和を帰納法で求める

左辺 $\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{2^r} \tan \frac{\theta}{2^r}$ を S_n と書き、$P(n)$ を次の命題とする。

$$S_n = \frac{1}{2^n} \cot \frac{\theta}{2^n} - \cot \theta. \tag{$*$}$$

基底段階（*base case*）$n = 1$。$(*)$ に $x = \theta/2$ を代入し、両辺を 2 で割ると

$$S_1 = \tfrac{1}{2} \tan \tfrac{\theta}{2} = \tfrac{1}{2} \cot \tfrac{\theta}{2} - \cot \theta,$$

となり、これは $P(1)$ である。

帰納ステップ。ある $k \geq 1$ について $P(k)$ が成り立つと仮定する。$(*)$ に $x = \theta/2^{k+1}$ を代入すると $2x = \theta/2^k$ であり、両辺を 2^{k+1} で割ると

$$\frac{1}{2^{k+1}} \tan \frac{\theta}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^{k+1}} \cot \frac{\theta}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^k} \cot \frac{\theta}{2^k}.$$

を得る。これを $P(k)$ に加えると

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + \frac{1}{2^{k+1}} \tan \frac{\theta}{2^{k+1}} \\ &= \left(\frac{1}{2^k} \cot \frac{\theta}{2^k} - \cot \theta \right) + \left(\frac{1}{2^{k+1}} \cot \frac{\theta}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^k} \cot \frac{\theta}{2^k} \right) \\ &= \frac{1}{2^{k+1}} \cot \frac{\theta}{2^{k+1}} - \cot \theta, \end{aligned}$$

となり、これは $P(k+1)$ である。数学的帰納法（induction）により、すべての $n \geq 1$ とすべての $\theta \in (0, \pi)$ に対して $P(n)$ が成り立つ。これが示すべきことであった。

> **考えてみよう** 恒等式 $(*)$ を初めて見るとしたら、どうすればそれに気づけるだろうか？

帰納法から逆向きにたどればよい。$n = k$ から $n = k+1$ に進むとき、右辺は $\frac{1}{2^{k+1}} \cot \frac{\theta}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^k} \cot \frac{\theta}{2^k}$ だけ変化し、左辺は $\frac{1}{2^{k+1}} \tan \frac{\theta}{2^{k+1}}$ だけ変化する。2^{k+1} を掛けて $x = \theta/2^{k+1}$ と書くと、二つの変化量が一致するのはちょうど $\tan x = \cot x - 2 \cot 2x$ のときである。つまり、どの恒等式を証明すべきかは問題そのものが教えてくれるのであり、あとは 2 倍角の公式（double-angle formulae）でそれを確かめればよい。

無限級数

項はすべて正であり、部分和（partial sum）の正確な式が得られているので、$n \to \infty$ のときの S_n の極限を求めれば十分である。$\varphi_n = \theta/2^n$ とおくと、$\varphi_n \to 0^+$ かつ $\frac{1}{2^n} = \frac{\varphi_n}{\theta}$ である。すると

$$\frac{1}{2^n} \cot \frac{\theta}{2^n} = \frac{\varphi_n}{\theta} \cdot \frac{\cos \varphi_n}{\sin \varphi_n} = \frac{1}{\theta} \cdot \frac{\varphi_n}{\sin \varphi_n} \cdot \cos \varphi_n \longrightarrow \frac{1}{\theta} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{\theta},$$

となる。ここで、$\varphi \to 0$ のときの標準的な極限 $\frac{\sin\varphi}{\varphi} \to 1$ と $\cos\varphi \to 1$ を用いた。$\cot\theta$ は n によらないから

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2^r} \tan\frac{\theta}{2^r} = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{\theta} - \cot\theta,$$

となり、これが求める結果である。特に、この級数はすべての $\theta \in (0, \pi)$ に対して収束（converge）する。

> **考えてみよう** 「無限級数の和は S_n の極限に等しい」と言ってよいのはなぜだろうか？

それが無限級数の和の定義だからである。$\sum_{r=1}^{\infty} a_r$ とは、極限が存在するときの $\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} a_r$ を意味する。その極限が存在することは実際に計算して示したので、これ以上何も必要ない。

検算

- $\theta = \frac{\pi}{2}$：右辺は $\frac{2}{\pi} - 0 \approx 0.63662$ である。級数の最初の 60 項を数値的に足しても 0.6366198 となる。
- $\theta = 1$：級数と $1 - \cot 1$ はどちらも 0.3579074 となる。
- θ が小さいとき：$\tan\frac{\theta}{2^r} \approx \frac{\theta}{2^r}$ であるから、級数はおよそ $\theta\sum 4^{-r} = \frac{\theta}{3}$ である。これは展開 $\frac{1}{\theta} - \cot\theta = \frac{\theta}{3} + O(\theta^3)$ と一致する。
- $\theta \to \pi^-$ のとき、$\cot\theta \to -\infty$ であり、第 1 項 $\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2} \to +\infty$ であるから、両辺はそろって発散する。当然そうなるべきである。

よくある間違い

- $(*)$ の係数 2 を間違え、たとえば $\tan x = \cot x - \cot 2x$ と書いてしまう。$x = \frac{\pi}{4}$ で確かめてみるとよい：$1 = 1 - 2\cdot 0$。
- $\frac{1}{2^n} \to 0$ だから $\frac{1}{2^n}\cot\frac{\theta}{2^n} \to 0$ だと主張してしまう。余接（cotangent）は $2^n/\theta$ のように増大するので、積は 0 ではなく $\frac{1}{\theta}$ に近づく。
- 正接と余接が定義される理由を述べ忘れる。すべての角 $\theta/2^r$ を $(0, \frac{\pi}{2})$ の中にとどめているのは、条件 $0 < \theta < \pi$ である。

STEP のその先へ

関数 $\frac{1}{\theta} - \cot\theta$ は有名な一族に属している。部分分数展開（partial-fraction expansion）$\cot\theta = \frac{1}{\theta} + \sum_{k\geq 1} \frac{2\theta}{\theta^2 - k^2\pi^2}$ を微分すると、バーゼル問題の和（Basel sum）$\sum 1/k^2 = \pi^2/6$ が得られる。オイラー（Euler）は、$\sin\theta$ の無限積からこのような結果を導いた。ヴィエト（Viète）の積 $\frac{\sin\theta}{\theta} = \prod_{r\geq 1} \cos\frac{\theta}{2^r}$ の対数をとって微分すると、ちょうどこの問題の級数が得られ、これは結果を理解するもう一つの見方である。無限和や無限積のこうした操作を厳密にすることは、大学 1 年の解析学の話題である。Abbott, *Understanding Analysis* を参照されたい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。