解答例

# STEP II 1994、第 5 問

純粋数学 • 実数解の個数

> **STEP II 1994、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q5

## 鍵となる考え方

$f(x) = c$ の解の個数を数えるということは、水平な直線 $y = c$ が $f$ のグラフと何回交わるかを問うことである。したがって重要なのは $f$ の形、すなわちどこで最小になり、どこで増加しどこで減少するかである。ここで現れる式はどれも、ある中心点に関して対称に置かれた二つの括弧からできている。中心が原点に来るように変数を平行移動すると、奇数乗の項が打ち消し合い（4 乗の場合）、あるいは偶数乗の項が打ち消し合い（3 乗の場合）、グラフの形が一目でわかるようになる。

## 解答

### 小問 (i)

二項定理（binomial theorem）で展開する。$(x+1)^4$ と $(x-1)^4$ では $x$ の奇数乗の項の符号が逆になるので、和をとるとそれらは打ち消し合う：

$$f(x) = (x-1)^4 + (x+1)^4 = 2(x^4 + 6x^2 + 1) = 2x^4 + 12x^2 + 2.$$

よって $f$ は偶関数（even function）であり、$f(x) = 2 + 2x^4 + 12x^2 \geq 2$ で、等号が成り立つのは $x = 0$ のときに限る。$x \geq 0$ において、$x > 0$ ならば $f'(x) = 8x^3 + 24x > 0$ であるから、$f$ は $[0, \infty)$ で狭義単調増加（strictly increasing）であり、$x \to \infty$ のとき $f(x) \to \infty$ である。$f$ は連続（continuous）であるから、$[0, \infty)$ 上で $[2, \infty)$ のすべての値をちょうど 1 回ずつとる。対称性により、$(-\infty, 0]$ 上でも同様である。

- $c > 2$ のとき：解 $x = a > 0$ がちょうど一つ存在し、$x = -a$ がもう一つの解となる。この二つは異なり、ほかに解はない。よって実数解は**ちょうど 2 個**である。

- $c = 2$ のとき：$f(x) = 2$ より $2x^4 + 12x^2 = 0$ となるので、$x = 0$ が**唯一の**解である。
- $c < 2$ のとき：すべての $x$ に対して $f(x) \geq 2 > c$ であるから、解は**存在しない**。

これがまさに求められていたことである。

（別解として、$2x^4 + 12x^2 + 2 - c = 0$ は $u = x^2$ についての 2 次方程式であり、その解は $u = -3 \pm \sqrt{8 + c/2}$ である。0 以上になりうるのは $+$ の方の解だけであり、それは $c > 2$、$c = 2$、$c < 2$ に応じて正、0、負となる。）

### 小問 (ii)

括弧 $x - 3$ と $x - 1$ は $x = 2$ を中心としているので、$y = x - 2$ とおく。すると

$$(x-3)^4 + (x-1)^4 = (y-1)^4 + (y+1)^4,$$

となり、これは小問 (i) の式を変数 $y$ で書いたものである。$x \mapsto y = x - 2$ は実数どうしの一対一対応（one-to-one correspondence）であるから、この方程式の実数解の個数は小問 (i) と同じである：

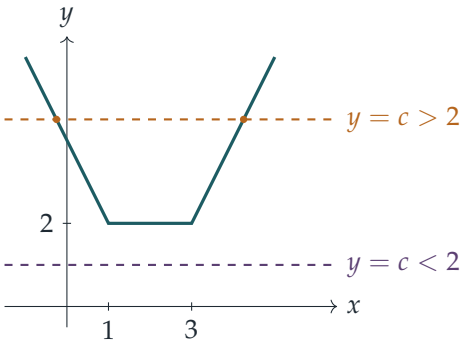
$$2 \text{ 個の解} : c > 2, \qquad 1 \text{ 個の解} (x = 2) : c = 2, \qquad \text{解なし} : c < 2.$$

### 小問 (iii)

$g(x) = |x - 3| + |x - 1|$ とおき、$x = 1$ と $x = 3$ で区切られる三つの区間それぞれで絶対値記号（modulus sign）を外す：

$$g(x) = \begin{cases} (3-x) + (1-x) = 4 - 2x, & x < 1, \\ (3-x) + (x-1) = 2, & 1 \leq x \leq 3, \\ (x-3) + (x-1) = 2x - 4, & x > 3. \end{cases}$$

よってグラフは底が平らな V 字形である。1 と 3 の間では一定値 2 をとり、その左側では狭義単調減少、右側では狭義単調増加であり、$[1, 3]$ の外では $g > 2$ となる。



- $c < 2$ のとき：至るところで $g(x) \geq 2 > c$ であるから、解は**存在しない**。
- $c = 2$ のとき：$1 \leq x \leq 3$ を満たすすべての $x$ が解であり、その外に解はないので、解は**無数に**存在する。
- $c > 2$ のとき：$[1,3]$ には解がない。$x < 1$ では $4 - 2x = c$ より $x = 2 - \frac{c}{2}$ となり、$c > 2$ であるからこれは確かに 1 より小さい。$x > 3$ では $2x - 4 = c$ より $x = 2 + \frac{c}{2} > 3$ となる。よって解は**ちょうど 2 個**、$x = 2 \pm \frac{c}{2}$ である。

> **考えてみよう** $c = 2$ のときの答えが小問 (ii) とこれほど異なるのはなぜだろうか。

4 乗の場合は、両方の項が狭義凸（strictly convex）であるため、和は中心点でただ一つの鋭い最小値をとる。絶対値の場合は、$x$ を 1 と 3 の間で動かすと、一方の距離が増える分だけちょうど他方の距離が減るので、和はその区間全体で 2（1 と 3 の間の距離）のままである。

### 小問 (iv)

再び $y = x - 2$ とおく。3 乗の場合は、打ち消し合うのは $y$ の偶数乗の項である：

$$(x-3)^3 + (x-1)^3 = (y-1)^3 + (y+1)^3 = 2y^3 + 6y.$$

$h(y) = 2y^3 + 6y$ とおく。すると、すべての実数 $y$ に対して

$$h'(y) = 6y^2 + 6 \geq 6 > 0$$

であるから、$h$ は実数全体で狭義単調増加であり、したがって各値を高々 1 回しかとらない。また $y \to \infty$ のとき $h(y) \to \infty$、$y \to -\infty$ のとき $h(y) \to -\infty$ であり、$h$ は連続であるから、中間値の定理（intermediate value theorem）により、すべての実数値を少なくとも 1 回とる。

よって**すべての**実数 $c$ に対して、この方程式は**ちょうど 1 個の**実数解をもつ。

## 検算

- 中心点 $x = 2$ では、4 乗の二つの式はどちらも $1 + 1 = 2$ に等しく、$c = 2$ の場合と一致する。また $(2-3)^3 + (2-1)^3 = 0$ である。
- 小問 (iv) で $c = 8$ ならば $x = 3$ となるはずである：実際 $0^3 + 2^3 = 8$ であり、$y = 1$ で $h(1) = 2 + 6 = 8$ となる。
- 小問 (iii) で $c = 4$ のとき、解 $x = 0$ と $x = 4$ はそれぞれ $3 + 1 = 4$ と $1 + 3 = 4$ を与える。

展開式が無作為に選んだ点で成り立つことを数値的に確認し、さらにさまざまな $c$ の値（たとえば (i) と (ii) では $c = 1.9$、2.5、100、(iv) では $-1000$ から 5000 までの $c$）について、各関数から $c$ を引いたものの符号の変化を細かい格子上で数えた。その個数は主張どおり 0、2、2、そして常に 1 であった。

## よくある間違い

- 小問 (iii) の $c = 2$ の場合に「解は 1 個」や「解は 2 個」と答えてしまう。区間 $1 \leq x \leq 3$ 全体が解からなる。
- 小問 (iv) で、3 次方程式は「実数解を 1 個または 3 個もつ」と論じるだけで、どちらであるかを決めない。至るところで $h'(y) > 0$ であるという事実によって決着がつく。
- $x = 2 - \frac{c}{2}$ が、式 $4 - 2x$ を用いた領域 $x < 1$ に本当に属しているかを確かめ忘れる。

## STEP のその先へ

ここでの議論は、大学最初の解析学の講義で丁寧に証明される二つの定理に基づいている。中間値の定理（区間上の連続関数はその間のすべての値をとる）と、導関数が正である関数は狭義単調増加であるという事実であり、後者は平均値の定理（mean value theorem）から導かれる。小問 (iii) はまた、凸性（convexity）と $\ell^1$ 距離への最初の入り口でもある。二点への距離の和は、その二点を結ぶ線分全体で最小となるのである。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）は、これらの考え方を厳密に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。