解答例

# STEP II 1994、第 4 問

純粋数学 ・ 楕円の面積

> **STEP II 1994、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q4

## 鍵となる考え方

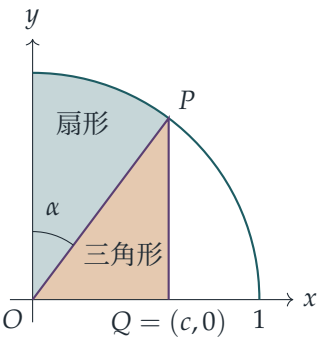
最初の積分は四分円（quarter circle）の下の面積であり、その面積は直角三角形（right-angled triangle）と扇形（sector）にきれいに分かれるので、置換（substitution）は必要ない。楕円（ellipse）は円を縦と横にそれぞれ異なる倍率で引き伸ばしたものであり、引き伸ばしは面積を定数倍するので、2 番目の結果はただちに得られる。最後の部分では対称性（symmetry）がほとんどすべての仕事をしてくれる。2 つの楕円は直線 $y = x$ に関して互いに鏡映の関係にあるので、共通部分の 8 分の 1 だけを考えればよく、その部分は 2 番目の結果から三角形を引いたものになる。

## 解答

### $(1 - x^2)^{1/2}$ の積分

考える領域は、四分円 $y = (1 - x^2)^{1/2}$、座標軸、および直線 $x = c$ で囲まれた部分である（曲線は境界として読む必要がある。すなわち、領域は $0 \le y \le (1 - x^2)^{1/2}$ かつ $0 \le x \le c$ を満たす点全体である）。その面積がちょうど求めたい積分である。

$P = (c, (1 - c^2)^{1/2})$ を $x = c$ の上にある円周上の点とし、$Q = (c, 0)$ とおき、さらに $\alpha = \sin^{-1} c$ とおく。このとき $0 < \alpha \le \frac{\pi}{2}$ である。$O$ と $P$ を結ぶと、領域は 2 つの部分に分かれる。




- 三角形 $OQP$ は $Q$ で直角をなし、底辺は $c$、高さは $(1-c^2)^{1/2}$ なので、その面積は $\frac{1}{2}c(1-c^2)^{1/2}$ である。
- 残りは、$OP$ と $y$ 軸の間にある単位円の扇形である。$P$ の $y$ 軸からの水平距離は $c = 1 \cdot \sin\alpha$ であるから、$OP$ と $y$ 軸のなす角は $\alpha$ である。半径 1、中心角 $\alpha$ の扇形の面積は $\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\sin^{-1}c$ である。

2 つの部分を足し合わせると

$$\int_0^c (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\left[c(1-c^2)^{\frac{1}{2}} + \sin^{-1}c\right], \qquad 0 < c \le 1,$$

となり、これが示すべき式である（$c = 1$ のときは三角形がつぶれ、四分円の面積 $\frac{\pi}{4}$ が得られる）。

### 楕円の下の面積

今回も領域は曲線の上半分 $y = b\left(1 - x^2/a^2\right)^{1/2}$ の下、$0 \le x \le c$ の範囲にあるので、その面積は

$$\int_0^c b\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x.$$

である。$x = au$ と置換すると $\mathrm{d}x = a\,\mathrm{d}u$ となり、積分区間は 0 から $c/a$ になる（$0 < c \le a$ より $0 < c/a \le 1$ である）。よってこれは

$$ab\int_0^{c/a}(1-u^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u = \frac{ab}{2}\left[\frac{c}{a}\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \sin^{-1}\left(\frac{c}{a}\right)\right],$$

に等しい。ここで最初の結果を $c$ を $c/a$ に置き換えて用いた。これが求める面積である。

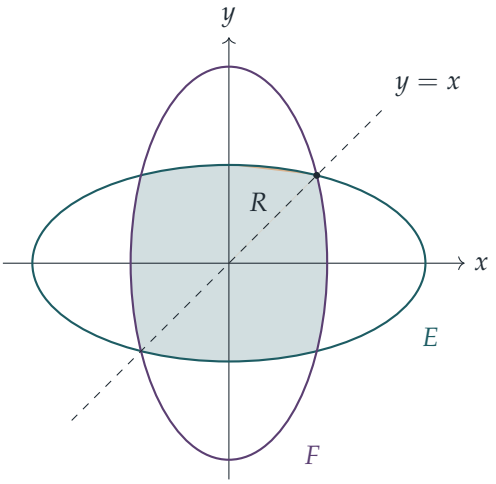
幾何学的には、楕円は単位円を横に $a$ 倍、縦に $b$ 倍に引き伸ばしたものであり、この引き伸ばしはあらゆる面積を $ab$ 倍する。

## 2 つの楕円の共通部分

$E$ も $F$ も $x \mapsto -x$ および $y \mapsto -y$ で不変であるから、$E \cap F$ も不変であり、その面積は象限 $x, y \geq 0$ にある部分の面積の 4 倍である。また、$x$ と $y$ を入れ替えると $E$ は $F$ に、$F$ は $E$ に移るので、$E \cap F$ は直線 $y = x$ に関して対称である。したがって第 1 象限にある 4 分の 1 の部分は、互いに鏡像となる 2 つの半分からなり、

$$\text{面積}(E \cap F) = 8 \times \text{面積} R, \qquad R = \{(x, y) \in E \cap F : 0 \leq x \leq y\}.$$

が成り立つ。




**考えてみよう** $R$ において、実際に境界をなしているのは 2 つの楕円のうちどちらか？

任意の点に対して

$$\left(\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2}\right) - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) = (x^2 - y^2)\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right).$$

が成り立つ。$0 \leq x \leq y$ のとき $x^2 - y^2 \leq 0$ であり、$0 < b \leq a$ より $\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \geq 0$ である。よってこの差は $\leq 0$ となる。すなわち、$y = x$ のこちら側では、$E$ に含まれる点は自動的に $F$ にも含まれる。したがって

$$R = \{(x, y) \in E : 0 \leq x \leq y\},$$

であり、$E$ だけを考えればよい（ここで $b \leq a$ を用いている。$b > a$ ならば 2 つの楕円の役割が入れ替わる）。

$E$ の境界が第 1 象限で $y = x$ と交わるのは $x^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = 1$ となるところ、すなわち $x = y = x_0$ であり、

$$x_0 = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

である。$0 \le x \le x_0$ では $E$ の上半分は $y = x$ 上またはその上側にあり（高さ $b > 0$ から始まり、直線とは $x_0$ でのみ交わる）、$x > x_0$ では直線の下側にある。よって $R$ は、$0 \le x \le x_0$ における $y = x$ と曲線 $y = b(1 - x^2/a^2)^{1/2}$ の間の領域であり、

$$\text{面積}(R) = \underbrace{\int_0^{x_0} b\Big(1 - \frac{x^2}{a^2}\Big)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x}_{\text{前の結果で}c=x_0} - \underbrace{\tfrac{1}{2}x_0^2}_{\text{三角形、上辺は}y=x}.$$

となる。$c = x_0$ とすると（必要な条件 $0 < x_0 < a$ も満たされる）、

$$\frac{c}{a} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \Big(1 - \frac{c^2}{a^2}\Big)^{\frac{1}{2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \frac{c}{a}\Big(1 - \frac{c^2}{a^2}\Big)^{\frac{1}{2}} = \frac{ab}{a^2 + b^2}.$$

である。よって

$$\begin{aligned} \text{面積}(E \cap F) &= 8\,\text{面積}(R) \\ &= 4ab\left[\frac{ab}{a^2 + b^2} + \sin^{-1}\Big(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\Big)\right] - \frac{4a^2b^2}{a^2 + b^2} \\ &= 4ab\sin^{-1}\Big(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\Big), \end{aligned}$$

となる。2 つの代数的な項はちょうど打ち消し合うからである。これが求める面積である。

**考えてみよう** なぜ代数的な項は打ち消し合うのか？

項 $\frac{ab}{2} \cdot \frac{c}{a}(1 - c^2/a^2)^{1/2} = \frac{1}{2}x_0y_0$ は、円の図における三角形 $O, (x_0, 0), (x_0, y_0)$ を引き伸ばしたものである。ここでは $y_0 = x_0$ なので、これはちょうど引き去った $y = x$ の下の三角形に一致する。残るのは引き伸ばされた扇形であり、だからこそ答えは純粋な逆正弦（inverse sine）になるのである。

## 検算

- $a = b$ ならば 2 つの楕円は同じ円であり、公式は $4a^2\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = 4a^2 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi a^2$ を与える。これは正しい。
- $a$ を固定して $b \to 0$ とすると、面積は $4ab \cdot \frac{b}{a} = 4b^2$ のように振る舞う。共通部分は、$E$ の細い横長の帯と $F$ の細い縦長の帯が交差する、一辺 $2b$ の正方形にほぼ等しい。
- $a = 2, b = 1$ のとき、公式は $8\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} \approx 3.70918$ を与える。2 つの境界のうち低い方に対してシンプソンの公式（Simpson's rule）を用いると 3.70918 が得られ、$2 \times 10^5$ 個の点によるモンテカルロ法（Monte Carlo method）の推定値は 3.707 である。最初の 2 つの結果も、多数のランダムな $a, b, c$ について数値積分（quadrature）で確かめた。

## よくある間違い

- 扇形の角を取り違える。扇形は $OP$ と $y$ 軸の間にあり、その角は $\sin^{-1} c$ であって $\cos^{-1} c$ ではない。
- どちらの楕円が領域の境界になっているかを確かめない。半分の領域 $0 \leq x \leq y$ で境界が $E$ になるのは $b \leq a$ だからである。逆の選び方をすると、答えの逆正弦の中で $b$ の代わりに $a$ が現れてしまう。

## STEP のその先へ

線形写像（linear map）$(x, y) \mapsto (ax, by)$ はあらゆる面積を $ab$ 倍し、一般に線形写像は面積をその行列式（determinant）の絶対値倍する。これは、大学 1 年の微積分で学ぶ重積分（multiple integral）の変数変換公式（change-of-variables formula）に現れるヤコビアン（Jacobian）の因子の 2 次元の場合である。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、行列式を面積（および体積）の拡大率として説明している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。