解答例

STEP II 1994、第 3 問

純粋数学 • 関数方程式

> **STEP II 1994、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q3

鍵となる考え方

f について分かっているのは、**すべての** x と y に対して成り立つ一つの恒等式（identity）と、一つの値 $\mathrm{f}(0) = 1$ だけである。したがって使える道具は代入（substitution）しかない。値が分かっている（あるいはすぐに分かる）0 や a に多くの引数がなるように、x と y を選ぶのである。この恒等式は $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ を思い起こさせるはずで、$\mathrm{f}(a-x)$ が $\pm \sin x$ の役割を果たしている。この類推から、何が成り立つと予想されるか、そして例として何を挙げればよいかの両方が分かる。

解答

以下では、与えられた恒等式を

$$\mathrm{f}(x-y) = \mathrm{f}(x)\,\mathrm{f}(y) - \mathrm{f}(a-x)\,\mathrm{f}(a+y) \qquad \text{任意の} x, y. \qquad (*)$$

と書く。以下のどの段階も $(*)$ への代入だけで進めるので、連続性（continuity）や微分可能性（differentiability）など、それ以外のことは一切仮定しない。

$\mathrm{f}(a) = 0$ を示す

$(*)$ に $x = y = 0$ を代入すると

$$\mathrm{f}(0) = \mathrm{f}(0)^2 - \mathrm{f}(a)\,\mathrm{f}(a), \qquad \text{よって} \qquad 1 = 1 - \mathrm{f}(a)^2.$$

ゆえに $\mathrm{f}(a)^2 = 0$ であり、$\mathrm{f}(a)$ は実数であるから $\mathrm{f}(a) = 0$ である。

小問 (i)

$(*)$ に $x=0$、$y=t$ を代入すると、$\mathrm{f}(0)=1$ と $\mathrm{f}(a)=0$ を用いて

$$\mathrm{f}(-t)=\mathrm{f}(0)\,\mathrm{f}(t)-\mathrm{f}(a)\,\mathrm{f}(a+t)=1\cdot\mathrm{f}(t)-0=\mathrm{f}(t),$$

を得る。よって f は偶関数（even function）である。

小問 (ii)

$(*)$ に $x=y=a$ を代入すると

$$\mathrm{f}(0)=\mathrm{f}(a)^2-\mathrm{f}(0)\,\mathrm{f}(2a),\qquad \text{よって}\qquad 1=0-\mathrm{f}(2a),$$

となり、$\mathrm{f}(2a)=-1$ を得る。

小問 (iii)

考えてみよう 右辺の第1項の積を消し、しかも t を自由に残しておけるような代入はどれか。

$x=a$ とおくと、（$\mathrm{f}(a)=0$ であるから）項 $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(y)$ が消え、$\mathrm{f}(a-x)$ は $\mathrm{f}(0)=1$ になり、しかも y は自由なままである。$x=a$ のとき、$(*)$ は

$$\mathrm{f}(a-y)=0\cdot\mathrm{f}(y)-\mathrm{f}(0)\,\mathrm{f}(a+y)=-\mathrm{f}(a+y)\qquad \text{任意の}y.$$

となる。つまり f は「a に関して奇」である。ここで $y=a-t$ とすると、$a-y=t$、$a+y=2a-t$ であるから

$$\mathrm{f}(t)=-\mathrm{f}(2a-t),$$

すなわち、すべての t に対して $\mathrm{f}(2a-t)=-\mathrm{f}(t)$ が成り立ち、これが示すべきことであった。（$t=0$ とおくと小問 (ii) が再び得られ、整合性の確認として役に立つ。）

小問 (iv)

(i) を間に挟んで (iii) を2回用いる。まず、(iii) で t を $-t$ に置き換え、(i) を用いると

$$\mathrm{f}(2a+t)=-\mathrm{f}(-t)=-\mathrm{f}(t),\tag{1}$$

を得る。つまり、引数を $2a$ だけずらすと符号が変わる。さらに $2a$ ずらす、すなわち (1) で t を $2a+t$ に置き換えると

$$\mathrm{f}(4a+t)=-\mathrm{f}(2a+t)=-(-\mathrm{f}(t))=\mathrm{f}(t).$$

よって f は（$a\neq 0$ のとき）周期 $4a$ の周期関数（periodic function）であり、これはちょうど周期 $4\cdot\frac{\pi}{2}=2\pi$ のコサインと同じである。

例

$a = \pi/2$ **の場合。** $\mathrm{f}(x) = \cos x$ とする。すると $\mathrm{f}(0) = 1$ であり、$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$、$\cos(\frac{\pi}{2} + y) = -\sin y$ であるから

$$\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(y) - \mathrm{f}(\tfrac{\pi}{2} - x)\mathrm{f}(\tfrac{\pi}{2} + y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x - y) = \mathrm{f}(x - y).$$

$a = -2$ **の場合。** $\mathrm{f}(x) = \cos kx$ を試す。上の結果から、$\mathrm{f}(a) = 0$、すなわち $\cos(2k) = 0$ であり、周期が $4|a| = 8$ である必要がある。そこで $k = \frac{\pi}{4}$、すなわち $\mathrm{f}(x) = \cos\frac{\pi x}{4}$ とする。確かめよう。$\mathrm{f}(0) = 1$ であり、$u = \frac{\pi x}{4}$、$v = \frac{\pi y}{4}$ とおくと

$$\mathrm{f}(-2 - x) = \cos(-\tfrac{\pi}{2} - u) = \cos(\tfrac{\pi}{2} + u) = -\sin u, \qquad \mathrm{f}(-2 + y) = \cos(v - \tfrac{\pi}{2}) = \sin v,$$

であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(y) - \mathrm{f}(-2 - x)\mathrm{f}(-2 + y) &= \cos u \cos v + \sin u \sin v \\ &= \cos(u - v) = \cos\tfrac{\pi(x-y)}{4} = \mathrm{f}(x - y).\end{aligned}$$

どちらの関数も明らかに定数ではない。（より一般に、$\cos ka = 0$ を満たす任意の a に対して $\cos kx$ が条件を満たすので、$a = -2$ に対しては $\cos\frac{3\pi x}{4}$ でもよい。）

検算

小問 (iii) で $t = 0$ とすると $\mathrm{f}(2a) = -\mathrm{f}(0) = -1$ となり、(ii) と一致する。また (iii) で $t = a$ とすると $\mathrm{f}(a) = -\mathrm{f}(a)$ となり、$\mathrm{f}(a) = 0$ と一致する。数値的には、$a = -2$ に対する $\mathrm{f}(x) = \cos\frac{\pi x}{4}$ について、$x = 1$、$y = 3$ のとき左辺は $\mathrm{f}(-2) = 0$、右辺は $\mathrm{f}(1)\mathrm{f}(3) - \mathrm{f}(-3)\mathrm{f}(1) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} = 0$ である。コンピュータで両方の例を 20 000 組の無作為な (x, y) について調べたところ、恒等式は誤差 10^{-13} 以内で成り立っていた。

よくある間違い

- 半周期分のずれの符号を誤ること。(iii) と (i) から $\mathrm{f}(t + 2a) = -\mathrm{f}(t)$ が得られるので、周期は $2a$ ではなく $4a$ である。
- (i)–(iv) を証明する際に、f が微分可能である（あるいはコサインである）と仮定してしまうこと。問題はそれを禁じており、使ってよいのは代入だけである。
- $a = -2$ の場合に、恒等式を満たすことを確かめずに $\cos\frac{\pi x}{4}$ を答えとすること。$\mathrm{f}(a) = 0$ と周期が合うことはよい手がかりではあるが、証明ではない。

STEP のその先へ

関数が満たす恒等式からその関数を決定することは、**関数方程式**（functional equations）の主題である。ここでは、ただ一つの恒等式から、偶関数であること、「半周期」での符号の反転、そして周期性が導かれた。解析学の講義では古典的な結果に出会う。コーシー（Cauchy）の関数方程式 $\mathrm{f}(x+y)=\mathrm{f}(x)+\mathrm{f}(y)$ は、連続性を加えれば $\mathrm{f}(x)=cx$ を導くが、そのような条件がなければ奇妙な解が存在する。同様に、コサインの減法定理は連続関数の中で $\cos kx$ を特徴づける。このような議論に連続性がどのように関わるかについての丁寧な扱いは、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門の教科書）を参照せよ。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。