解答例

STEP II 1994、第 2 問

純粋数学 ・ ルジャンドル多項式

> **STEP II 1994、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q2

鍵となる考え方

因数 $(x-a)^m$ は、微分するたびに少しずつ弱まりながらも生き残る。そのため、m 重の重根（repeated root）は、第 1 次から第 $m-1$ 次までの導関数（derivative）の根でもある。多項式 $(x^2-1)^n = (x-1)^n(x+1)^n$ は区間 $[-1,1]$ の両端に n 重の重根をもつので、$x^m \mathrm{P}_n(x)$ を部分積分（integration by parts）すると、境界項（boundary term）はすべて消える。部分積分を 1 回行うごとに、微分が 1 つ $(x^2-1)^n$ から x^m へと移る。そして $(x^2-1)^n$ の微分が尽きるより先に、x^m のほうが微分し尽くされてしまうのである。

解答

重根と導関数

積の微分法則（product rule）により、

$$\begin{aligned}\mathrm{P}'(x) &= m(x-a)^{m-1}\mathrm{Q}(x) + (x-a)^m\mathrm{Q}'(x)\\ &= (x-a)^{m-1}[m\mathrm{Q}(x) + (x-a)\mathrm{Q}'(x)] = (x-a)^{m-1}\mathrm{R}(x),\end{aligned}$$

である。ここで $\mathrm{R}(x) = m\mathrm{Q}(x) + (x-a)\mathrm{Q}'(x)$ は多項式である。多項式の和と積はまた多項式だからである。これが求める形である。

この結果は、因数 $(x-a)^k$（$k \geq 1$）をもつ多項式の導関数は因数 $(x-a)^{k-1}$ をもつ、ということを述べている。$k = m$ から始めてこれを繰り返し適用すると、ある多項式 R_r を用いて

$$\mathrm{P}^{(r)}(x) = (x-a)^{m-r}\mathrm{R}_r(x) \qquad (0 \leq r \leq m)$$

と書ける。各段階の適用は正当である。$\mathrm{P}^{(r+1)}$ を得るために $\mathrm{P}^{(r)}$ を微分するのは $r \leq m-1$ のときだけであり、そのとき指数 $m-r$ は1以上だからである。$1 \leq r \leq m-1$ ならば $m-r \geq 1$ なので、$(x-a)$ は依然として $\mathrm{P}^{(r)}(x)$ の因数であり、したがって $\mathrm{P}^{(r)}(a)=0$ である。（これは $r=0$ のときにも成り立つが、$r=m$ のときには一般には成り立たない。）

P_n は n 次の多項式である

$\mathrm{F}(x)=(x^2-1)^n$ とおく。二項定理（binomial theorem）により、$\mathrm{F}(x)$ は x^{2n} に次数が $2n-2$ 以下の項を加えたものである。x^k を n 回微分すると、0（$k<n$ のとき）か x^{k-n} の定数倍になるので、$\mathrm{P}_n=\mathrm{F}^{(n)}$ は次数が n 以下の多項式である。その x^n の項は x^{2n} からのみ生じる：

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}x^{2n}=2n(2n-1)\cdots(n+1)\,x^n=\frac{(2n)!}{n!}\,x^n.$$

この係数は0でないので、P_n の次数はちょうど n である。

消える積分

$\mathrm{F}(x)=(x-1)^n(x+1)^n$ であるから、最初の小問の結果を $a=1$、$m=n$、$\mathrm{Q}(x)=(x+1)^n$ として用いると、$1 \leq r \leq n-1$ に対して $\mathrm{F}^{(r)}(1)=0$ がわかる。$a=-1$ として同じ議論を行えば $\mathrm{F}^{(r)}(-1)=0$ を得る。また、直接計算により $\mathrm{F}(\pm 1)=0$ である。よって

$$\mathrm{F}^{(r)}(\pm 1)=0 \qquad \text{ただし} 0 \leq r \leq n-1. \tag{$*$}$$

次に、$j \geq 1$、$1 \leq k \leq n$ とする。x^j を微分し $\mathrm{F}^{(k)}$ を積分する形で部分積分を行うと、

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} x^j\mathrm{F}^{(k)}(x)\,\mathrm{d}x &= \left[x^j\mathrm{F}^{(k-1)}(x)\right]_{-1}^{1}-j\int_{-1}^{1}x^{j-1}\mathrm{F}^{(k-1)}(x)\,\mathrm{d}x\\ &= -j\int_{-1}^{1}x^{j-1}\mathrm{F}^{(k-1)}(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

となる。$k-1 \leq n-1$ であるから、$(*)$ により境界項が消えるからである。

考えてみよう 不都合が生じるまでに、これを何回使えるだろうか。

1回使うごとに、x の次数が1つ下がり、導関数の階数も1つ下がる。出発点は x^m と $\mathrm{F}^{(n)}$ なので、これを m 回適用できる。この操作には $k \geq 1$ が必要であり、用いる k の最小値は $n-m+1 \geq 1$ である。m 回の操作の後には

$$\int_{-1}^{1}x^m\mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{d}x=(-1)^m m!\int_{-1}^{1}\mathrm{F}^{(n-m)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

となる。（$m=0$ のときは、これはもとの積分そのものである。）

$0 \le m \le n-1$ ならば $n-m \ge 1$ なので、最後の被積分関数（integrand）はそれ自体が導関数であり、

$$\int_{-1}^{1} x^m \mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^m m! \left[\mathrm{F}^{(n-m-1)}(x)\right]_{-1}^{1} = 0,$$

となる。$0 \le n-m-1 \le n-1$ であるから $(*)$ が使えるのである。これが求める結果である。

$m = n$ の場合

$m = n$ のときも同じ変形はそのまま成り立ち（最後の段階では $k = 1$ を用いる）、

$$\int_{-1}^{1} x^n \mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^n n! \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n\,\mathrm{d}x = n! \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x,$$

を得る。$(x^2-1)^n = (-1)^n(1-x^2)^n$ だからである。被積分関数は偶関数（even function）であり、置換（substitution）$x = \sin t$、$\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$ によって $[0,1]$ は $[0, \frac{\pi}{2}]$ に移り、$1-x^2 = \cos^2 t$ となる。したがって、ヒントの公式を用いると

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\pi/2} \cos^{2n+1} t\,\mathrm{d}t = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

ゆえに

$$\boxed{\int_{-1}^{1} x^n \mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2^{2n+1}(n!)^3}{(2n+1)!}.}$$

検算

$n = 1$ のとき、$\mathrm{P}_1(x) = 2x$ なので $\int_{-1}^{1} x \cdot 2x\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$ であり、公式からは $\frac{8\cdot 1}{6} = \frac{4}{3}$ が得られる。$n = 2$ のとき、$\mathrm{P}_2(x) = 12x^2 - 4$ である。このとき $\int_{-1}^{1} (12x^2-4)\,\mathrm{d}x = 8 - 8 = 0$ であり、$\int_{-1}^{1} x(12x^2-4)\,\mathrm{d}x = 0$（被積分関数が奇関数）となって、予想どおりである。さらに $\int_{-1}^{1} x^2(12x^2-4)\,\mathrm{d}x = \frac{24}{5} - \frac{8}{3} = \frac{32}{15}$ であり、これは $\frac{2^5\cdot 8}{120} = \frac{32}{15}$ と一致する。$n \le 10$ について、これらすべてをコンピュータで厳密に確かめた。

よくある間違い

- 境界項が消えるためには、$1 \le r \le n-1$ だけでなく $r = 0$ に対しても $\mathrm{F}^{(r)}(\pm 1) = 0$ が必要であることを忘れる。$m = n-1$ のときの最後の段階では $r = 0$ を用いる。
- 符号を見失う。$(x^2-1)^n = (-1)^n(1-x^2)^n$ が部分積分から生じる $(-1)^n$ を打ち消すので、答えは正になる。$x^n \mathrm{P}_n(x)$ の最高次の係数は正なので、これは妥当である。

STEP のその先へ

定数倍を除けば、P_n は n 次のルジャンドル（Legendre）多項式（Legendre polynomial）であり、ここで用いたその表示式はロドリゲス（Rodrigues）の公式（Rodrigues' formula）である。最初の結果は、内積（inner product）$\int_{-1}^{1} fg\,\mathrm{d}x$ に関して、P_n がそれより次数の低いすべての多項式と直交する（orthogonal）ことを述べている。これはルジャンドル級数やガウス（Gauss）求積（Gaussian quadrature）の背後にある性質である。ルジャンドル多項式は、球座標（spherical coordinates）におけるラプラス（Laplace）方程式（Laplace's equation）の解法にも現れる。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）では、ルジャンドルの微分方程式を通してこれらに出会う。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。