解答例

STEP II 1994、第 14 問

確率・統計 ・ 幾何的確率

STEP II 1994、問 14

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/94-s2-q14

鍵となる考え方

「円板上で一様（uniform）」とは、確率が面積に比例するということである。したがって、中心から距離 r 以内に落ちる確率は、小さい円板の面積を的全体の面積で割ったものであり、これによって R の分布関数（distribution function）がただちに得られる。小問 (ii) は、1 回の投げあたり 1 つの確率 p を求め、幾何分布的な「少なくとも 1 回成功する」確率を計算し、整数を変数とする関数を最小化する問題に帰着する。この最小化は微分ではなく、隣り合う値の差を調べることで行う。

解答

小問 (i)

各ダーツを、半径 a の円板上に一様に分布する点としてモデル化する。すると、ダーツが的の任意の領域に落ちる確率は、その領域の面積を πa^2 で割ったものである。

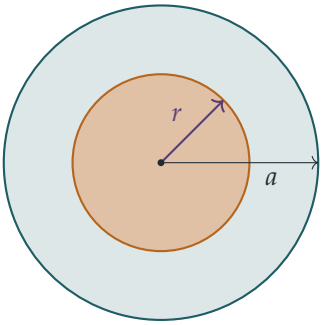
$0 \le r \le a$ に対して、事象 $R \le r$ はダーツが半径 r の同心円板に落ちることを意味するので、

$$\mathrm{P}(R \le r) = \frac{\pi r^2}{\pi a^2} = \frac{r^2}{a^2}.$$

これを微分すると、R の確率密度関数（probability density function）は

$$f(r) = \frac{2r}{a^2} \qquad (0 \le r \le a),$$

であり、それ以外では $f(r) = 0$ である。



R は $[0, a]$ 上で一様**ではない**ことに注意する。半径が大きいところほど面積が大きい（細い円環が長くなる）ため、密度は r に比例して増加するのである。

さて、

$$\mathrm{E}(R) = \int_0^a r \cdot \frac{2r}{a^2}\,\mathrm{d}r = \frac{2}{a^2} \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{2a}{3},$$
$$\mathrm{E}(R^2) = \int_0^a r^2 \cdot \frac{2r}{a^2}\,\mathrm{d}r = \frac{2}{a^2} \cdot \frac{a^4}{4} = \frac{a^2}{2},$$

であるから、

$$\mathrm{Var}(R) = \mathrm{E}(R^2) - (\mathrm{E}(R))^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{4a^2}{9} = \frac{a^2}{18},$$

となり、題意が示された。

小問 (ii)

（問題文の「with $a/\sqrt{10}$」は「within $a/\sqrt{10}$」の誤りと解釈する。）小問 (i) より、1 回の投げで中心から $a/\sqrt{10}$ 以内に落ちる確率は

$$p = \frac{(a/\sqrt{10})^2}{a^2} = \frac{1}{10}.$$

各投げは独立（independent）であると仮定する（毎回、的の上の新たな一様ランダムな点となる）。すると、m 回の投げのどれも中心から $a/\sqrt{10}$ 以内に入らない確率は $(0.9)^m$ であるから、

$$\mathrm{P}(\text{払い戻し£12}) = 1 - (0.9)^m.$$

彼の損失は、支払う £$(12 + m)$ から払い戻される金額を引いたものなので、ポンド単位での期待損失は

$$L(m) = 12 + m - 12(1 - (0.9)^m) = m + 12(0.9)^m.$$

投げる回数を 1 回増やすと確実に £1 かかるが、£12 が戻ってくる可能性は高くなる。この 2 つが釣り合うところを求めればよい。

考えてみよう 整数でのみ定義された関数は、どのように最小化すればよいだろうか？

隣り合う値を比較する。$m \geq 1$ に対して、

$$L(m+1) - L(m) = 1 + 12(0.9)^m(0.9-1) = 1 - 1.2\,(0.9)^m.$$

$(0.9)^m$ は m が増えると減少するので、この差は m について増加する。したがって、L は差が負である間は減少し、差が正になると増加する。差が負になるのは、ちょうど $(0.9)^m > \frac{1}{1.2} = \frac{5}{6}$ のときである。ここで

$$(0.9)^1 = 0.9 > \tfrac{5}{6}, \qquad (0.9)^2 = 0.81 < \tfrac{5}{6},$$

であるから、$L(2) - L(1) < 0$ であり、すべての $m \geq 2$ に対して $L(m+1) - L(m) > 0$ である。ゆえに

$$L(1) > L(2) < L(3) < L(4) < \cdots,$$

であり、実際 $L(1) = 11.80$、$L(2) = 11.72$、$L(3) = 11.748$ である。（彼は必ずゲームをすると決めているので、$m = 0$ は許されない。いずれにせよ $L(0) = 12$ はより大きい。）

彼は $m = 2$ 回を選ぶべきであり、そのときの期待損失は £11.72 である。最小値は狭義の最小なので、そのような値は $m = 2$ のみである。

検算

- 単位円板内の一様な点 4×10^5 個のシミュレーションでは、平均 0.667、2 乗の平均 0.500、分散 0.0556 $\approx \frac{1}{18}$ が得られ、それぞれ $\frac{2}{3}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{18}$ と一致した。また、点のおよそ 10% が中心から $1/\sqrt{10}$ 以内に入った。
- 厳密には $L(1) = \frac{59}{5}$、$L(2) = \frac{293}{25}$、$L(3) = \frac{2937}{250}$ であり、$1 \leq m \leq 99$ の範囲を探索すると $m = 2$ が最小であることが確認できる。
- 妥当性の確認：分散 $a^2/18$ は、$[0, a]$ 上の一様分布に従う変数の分散 $a^2/12$ よりはるかに小さい。これは R が縁の近くに集中しているためである。

よくある間違い

- R を $[0, a]$ 上の一様分布とみなしてしまい、分散 $a^2/12$ を得てしまう。
- 固定の £12 が費用の一部にすぎないことを忘れる。損失は単なる m ではなく、$12 + m$ から払い戻しの期待値を引いたものである。
- $m + 12(0.9)^m$ の導関数を 0 とおくと $m \approx 2.3$ が得られるが、これは答えではない。その両側の整数値を比較しなければならない。

STEP のその先へ

平面上の一様な点から R の分布を求めることは、同時密度（joint density）を極座標（polar coordinates）に変換する最も簡単な例である。$\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ に現れるヤコビアン（Jacobian）の因子 r こそが、R の密度を r に比例させているのである。同時密度の変数変換（change of variables）と、離散的な選択肢の上での最適化は、大学 1 年次の確率論の標準的な話題である。Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、その両方を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。