解答例

STEP II 1994、第 11 問

力学 ・ 放物運動と爆発

> **STEP II 1994、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q11

鍵となる考え方

爆発は既知の高さ、すなわち鉛直に打ち上げた砲弾の最高点で起こり、その瞬間に砲弾は静止している。したがって、二つの破片（fragment）は同じ点から、大きさが等しく向きが反対の速度で飛び出す。その向きを一つの角 θ で表せば、それぞれの着地時刻は二次方程式から求まり、着地点の間の距離は θ の一つの関数になる。答えが二つの場合に分かれるのは、その関数の最大値が、許される範囲の端でとられるか、内部の極値点でとられるかのいずれかだからである。

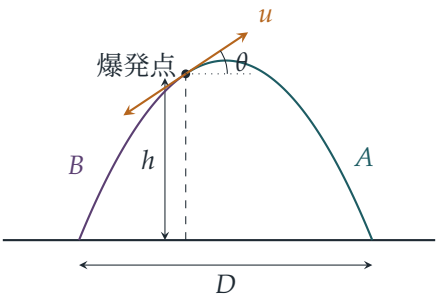
解答

設定

砲弾と破片を、重力のみを受けて運動する質点（particle）としてモデル化する。砲弾は初速 v で上昇するので、次の高さで静止する。

$$h = \frac{v^2}{2g}, \qquad \text{すなわち} \qquad 2gh = v^2.$$

爆発の直後の破片を A、B とよぶ。それらの速度は大きさが等しく向きが反対なので、どちらも爆発点を通る一つの鉛直面内にある。その平面内で x 軸を水平に、y 軸を鉛直上向きにとり、爆発点を $(0, h)$ とする。A が下向きに動かないように破片の名前をつけることができる。このとき A の速度は $(u\cos\theta,\ u\sin\theta)$、$B$ の速度は $(-u\cos\theta,\ -u\sin\theta)$ であり、$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ である。$s = \sin\theta$、$c = \cos\theta$ とおくと、$c \ge 0$ である。



着地時刻

爆発から時間 t 後の破片 A の高さは $h + ust - \frac{1}{2}gt^2$ である。A が着地するのは次のときである。

$$\tfrac{1}{2}gt^2 - us\,t - h = 0.$$

解の積は $-2h/g < 0$ であるから、正の解はちょうど一つであり、

$$t_A = \frac{us + \sqrt{u^2s^2 + 2gh}}{g} = \frac{us + \sqrt{u^2s^2 + v^2}}{g}.$$

B については鉛直方向の速度が $-us$ なので、s を $-s$ で置き換えて

$$t_B = \frac{-us + \sqrt{u^2s^2 + v^2}}{g}.$$

$\sqrt{u^2s^2 + v^2} > us$ であるから、これは正である。

着地点の間の距離

水平方向には、A は x の正の向きに $uc\,t_A$ だけ進み、B は負の向きに $uc\,t_B$ だけ進むので、両者は発射点をはさんで反対側に着地する。したがって、着地点の間の距離は

$$D = uc\,(t_A + t_B) = \frac{2uc\sqrt{u^2s^2 + v^2}}{g}.$$

$D \geq 0$ であるから、D を最大にすることは D^2 を最大にすることと同じである。$x = s^2 \in [0,1]$ とおくと、$c^2 = 1 - x$ である。このとき

$$\frac{g^2D^2}{4u^2} = (1-x)(v^2 + u^2x) = f(x), \qquad \text{とおく,}$$

であり、

$$f(x) = v^2 + (u^2 - v^2)x - u^2x^2.$$

これは最高次の係数が負である x の二次関数であり、その頂点（vertex）は

$$x^* = \frac{u^2 - v^2}{2u^2}.$$

考えてみよう f の頂点は最大値を与える。それなのに、なぜ答えはいつも $f(x^*)$ にならないのだろうか。

$x = \sin^2\theta$ であるから、許されるのは $x \in [0,1]$ のみである。常に $x^* < \frac{1}{2}$ であることに注意すると、頂点が上端を越えることはない。頂点が許される範囲にあるかどうかは、その符号だけで決まる。

場合 $u \le v$。このとき $x^* \le 0$ である。$[0,1]$ は下に凸でない（上に凸な）放物線の頂点より右側にあるので、そこで f は減少し、最大値は $x = 0$ でとられ、$f(0) = v^2$ である。これは $\theta = 0$、すなわち水平方向の爆発に対応する。よって

$$D_{\max} = \frac{2u}{g}\sqrt{v^2} = \frac{2uv}{g}.$$

場合 $v \le u$。このとき $0 \le x^* < \frac{1}{2}$ であるから、頂点は許される範囲にあり、最大値を与える。

$$f(x^*) = v^2 + \frac{(u^2-v^2)^2}{2u^2} - \frac{(u^2-v^2)^2}{4u^2} = v^2 + \frac{(u^2-v^2)^2}{4u^2}$$
$$= \frac{4u^2v^2 + u^4 - 2u^2v^2 + v^4}{4u^2} = \frac{(u^2+v^2)^2}{4u^2}.$$

したがって

$$D_{\max} = \frac{2u}{g}\cdot\frac{u^2+v^2}{2u} = \frac{u^2+v^2}{g}.$$

これが起こるのは $\sin^2\theta = \dfrac{u^2-v^2}{2u^2}$ のときであり、破片は水平に対してある角度をなして飛び出す。

$u = v$ のときは、どちらの式も $2u^2/g$ を与えるので、二つの答えは場合の境目で一致する。当然そうなるべきである。以上で証明が完了した。

検算

- 単位：uv/g と $(u^2+v^2)/g$ はどちらも（速さ）^{2}/（加速度）であり、これは長さである。
- $g = 9.8$、$u = 30$、$v = 10$ とすると、最適な角は $\theta \approx 41.8^\circ$ であり、D の一般式からも $(u^2+v^2)/g$ からも $D = 1000/9.8 \approx 102.04\,\mathrm{m}$ が得られる。水平方向の爆発では $2\cdot 30\cdot 10/9.8 \approx 61.2\,\mathrm{m}$ にしかならない。
- 二つの軌道を数値的に時間刻みで追跡し、θ を細かい格子上で走査すると、数百組の無作為な (u,v) について両方の最大値が再現される。

- $v = 0$ のとき砲弾は地面の高さで爆発し、答えは u^2/g となる。これは速さ u で 45° の方向に打ち出した物体の通常の最大到達距離であり、そうなるべきである。B はすぐに地面に突入し、$x^* = \frac{1}{2}$ から $\theta = 45°$ が得られる。

よくある間違い

- 最適な爆発は水平方向であると決めつけること。それが正しいのは $u \leq v$ のときだけである。
- 両方の破片に同じ滞空時間を用いること。上向きに飛ばされた破片のほうが長く空中にとどまる。
- 最大化するときに制約 $0 \leq \sin^2\theta \leq 1$ を忘れ、その結果、場合分けを見落とすこと。

STEP のその先へ

このすっきりした答えには、うまい説明がある。単に真下に落下していく重心（centre of mass）から見ると、破片は相対速度 $2u$ で一直線上を互いに離れていく。しかし、破片は異なる時刻に地面に到達するので、問題は制約付きの最適化となり、パラメータが変化するにつれて最大値が境界から内部へと切り替わる。この種の切り替えは、大学一年次の最適化で学ぶラグランジュ乗数（Lagrange multiplier）やカルーシュ・キューン・タッカー条件（Karush–Kuhn–Tucker conditions）において再び現れる。運動量保存（conservation of momentum）、重心系、そして放物運動の問題をさらに深く学ぶには、Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。