解答例

STEP II 1994、第 10 問

力学 ・ 弾性ひもと単振動

STEP II 1994、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/94-s2-q10

鍵となる考え方

トレーラーの位置ではなく、ロープの**伸び**（extension）を変数として扱う。トラックの速度は一定なので、伸びは符号を除いてトレーラーの加速度とまったく同じ方程式に従い、その方程式は単振動（simple harmonic motion）を表す。したがってロープは振動の半周期の間だけぴんと張った状態を保ち、その後、トラックより速く動いているトレーラーを放す。そこから先は、等速度で追いつくだけの単純な問題である。

解答

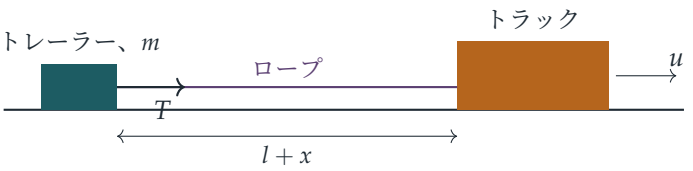
設定

トレーラーを質点とみなし、ロープは軽く、張っている間はフックの法則（Hooke's law）に従い（たるんでいる間は力を及ぼさない）とし、摩擦は無視する。時刻 t はロープが初めて張った瞬間から測り、距離は運動の向きに沿って測る。$t = 0$ においてトラックは速さ u で動いており（以後もその速さを保つ）、トレーラーは静止しており、トラックはトレーラーより距離 l だけ前方にある。

トレーラーの位置を $y(t)$ とし、$y(0) = 0$ とすると、トラックの位置は $l + ut$ である。ロープの伸びは

$$x = (l + ut) - y - l = ut - y.$$

である。



ロープが張っている間

$x > 0$ である間、張力（tension）は $T = \lambda x/l$ であり、これがトレーラーにはたらく唯一の水平方向の力で、トレーラーを前方へ引く。よって

$$m\ddot{y} = \frac{\lambda x}{l}.$$

である。$x = ut - y$ で u は定数だから $\ddot{x} = -\ddot{y}$ であり、したがって

$$\ddot{x} = -\omega^2 x, \qquad \text{ただし} \omega^2 = \frac{\lambda}{ml}.$$

となる。これは単振動である。初期条件は $x(0) = 0$（ロープはちょうど張ったところである）および $\dot{x}(0) = u - \dot{y}(0) = u$ なので、

$$x = \frac{u}{\omega}\sin\omega t, \qquad \dot{x} = u\cos\omega t.$$

を得る。トレーラーの速度は $\dot{y} = u - \dot{x} = u(1 - \cos\omega t)$ である。

考えてみよう 単振動の式では、しばらくすると x が負になる。そのときもこの式は成り立つだろうか？

成り立たない。方程式 $\ddot{x} = -\omega^2 x$ は張力 $\lambda x/l$ を用いて導いたが、これは $x > 0$ のときにしか当てはまらない。ロープは押すことができないからである。この式が成り立つのは $\sin\omega t \geq 0$ となる $0 \leq t \leq \pi/\omega$ の範囲であり、ロープは

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega} = \pi\left(\frac{lm}{\lambda}\right)^{1/2}.$$

で再びたるむ。この瞬間の伸びは 0 なので、トレーラーは再びトラックより距離 l だけ後方にあり、その速度は

$$\dot{y}(t_1) = u(1 - \cos\pi) = 2u.$$

である。

ロープがたるんだ後

$t > t_1$ ではトレーラーは $2u$、トラックは u で動くので、$t = t_1$ で l であった両者の間隔は一定の割合 $2u - u = u$ で縮む。このとき間隔は l より小さいのでロープはたるん

だままであり、トレーラーには依然として水平方向の力がはたらかず、その速さは確かに $2u$ のまま保たれる。間隔はさらに時間 l/u が経過すると 0 になる。

したがって、トレーラーがトラックに衝突するのは、ロープが初めて張ってから

$$t_1 + \frac{l}{u} = \pi\left(\frac{lm}{\lambda}\right)^{1/2} + \frac{l}{u}$$

後であり、これが示すべきことであった。

検算

- 単位：λ は力なので、lm/λ の単位は $\mathrm{m}\cdot\mathrm{kg}/\mathrm{N} = \mathrm{s}^2$ であり、両方の項はともに時間である。
- 座標系（frame）の変換：ロープは、トレーラーと実質的に無限大の質量をもつトラックとの弾性衝突（elastic collision）におけるばねのようにふるまう。トラックの座標系では、トレーラーは速さ u で近づき、逆向きに速さ u で離れていくので、地面に対する速さは最終的に $2u$ となり、上で求めた結果と一致する。
- m、l、λ、u に無作為な値を与えて、トレーラーの運動方程式（equation of motion）を（ロープがたるんでいるときは力を 0 として）数値積分したところ、公式が再現された。たとえば $\pi/\omega \approx 2.9944$、$l/u \approx 2.3017$ となるように m, l, λ, u を選ぶと、衝突時刻は 5.2962 となり、予測値 5.2961 とよく一致した。

よくある間違い

- 伸びが 0 に戻るとロープがたるむことを忘れ、単振動の解をすべての時刻に適用してしまう。
- トレーラーの位置 y について直接運動方程式を立て、外力項をもつ強制振動の方程式（forced equation）$m\ddot{y} = \lambda(ut - y)/l$ を得てしまう。これも解けなくはないが、置換 $x = ut - y$ を使えばただちに外力項のない方程式になる。
- 最後の l/u を忘れる：ロープがたるんだ時点で、トレーラーはまだトラックより自然長（natural length）だけ丸々後方にある。

STEP のその先へ

トラックの座標系に移ると、全体の出来事は、トレーラーと動かない壁に取り付けられたばねとの弾性的な「衝突」となる。トレーラーは速さ u で入ってきて速さ u で

出ていき、接触はその速さによらずちょうど半周期だけ続く。これは、ガリレイ不変性（Galilean invariance）とエネルギー保存則（conservation of energy）が衝突をどのように制約するかを示すもっとも簡単な例であり、この考え方は大学 1 年次の力学全体を貫き、さらに散乱理論（scattering theory）へとつながっていく。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、振動と衝突の両方をこうした精神で扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。