解答例

STEP I 1994、第 9 問

力学 ・ 放物運動

STEP I 1994、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/94-s1-q9

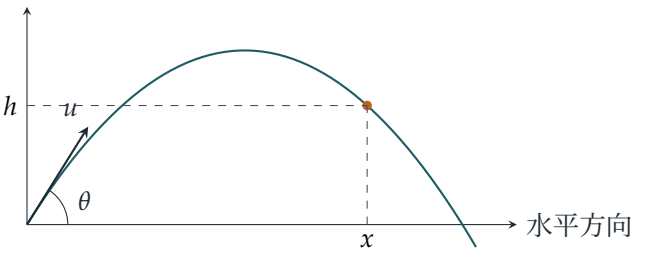
鍵となる考え方

発射角 θ は未知の量であるから、これを消去する。水平方向と鉛直方向の式にはそれぞれ $u\cos\theta$ または $u\sin\theta$ が含まれており、両辺を 2 乗して加えれば θ は完全に消える。得られる式は t^2 についての 2 次方程式（quadratic）であり、2 次方程式が実数解をもつのは判別式（discriminant）が負でないときに限る。この条件こそが到達距離に対する上界を与える。

解答

t についての方程式

砲弾を、原点から水平面に対して角 θ 上向きに発射され、重力のみを受けて運動する質点（particle）としてモデル化する。時刻 t において砲弾は水平距離 x、高さ h の位置にあるので、大砲からの距離は求めるとおり $\sqrt{x^2+h^2}$ である。



下向きの一定の加速度 g を用い、水平方向には力がはたらかないとすると、

$$x = ut\cos\theta,$$
$$h = ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

θ を含む項を分離すると、

$$ut\cos\theta = x, \qquad ut\sin\theta = h + \tfrac{1}{2}gt^2.$$

両辺を 2 乗して加え、$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ を用いると、

$$\begin{aligned} u^2t^2 &= x^2 + (h + \tfrac{1}{2}gt^2)^2 \\ &= x^2 + h^2 + ght^2 + \tfrac{1}{4}g^2t^4, \end{aligned}$$

これを整理すると

$$\tfrac{1}{4}g^2t^4 - (u^2 - gh)t^2 + h^2 + x^2 = 0,$$

となり、求める式が得られる。

到達距離の上界

ここで u と h を固定し、高さ h においてどのような水平距離 x が可能かを考える。ある時刻 t に砲弾が (x,h) にあるならば、$T = t^2$ は

$$\tfrac{1}{4}g^2T^2 - (u^2 - gh)T + (h^2 + x^2) = 0.$$

の実数解である。

考えてみよう この式には x、h、u、t が含まれているが、私たちが欲しいのは x だけについての主張である。2 次方程式が実数解をもつならば、何が成り立たなければならないか。

実数解をもつためには判別式が負でないことが必要である：

$$\begin{aligned} (u^2 - gh)^2 - 4\cdot\tfrac{1}{4}g^2(h^2 + x^2) &\geq 0 \\ u^4 - 2u^2gh + g^2h^2 - g^2h^2 - g^2x^2 &\geq 0 \\ g^2x^2 &\leq u^2(u^2 - 2gh). \end{aligned}$$

$u^2 > 2gh$ であるから右辺は正であり、負でない平方根をとると

$$x \leq \frac{u\sqrt{u^2 - 2gh}}{g}.$$

を得る。したがって、高さ h における水平到達距離がこの値を超えることは決してなく、これが示すべきことであった。（$u^2 < 2gh$ ならば、この不等式はどの x に対しても成り立たない。高さ h は砲弾が到達できる最高点の高さ $u^2/2g$ より上にあるからである。）

上界は達成される

等号成立は判別式が 0 であることを意味するので、重解

$$t^2 = T = \frac{u^2 - gh}{2 \cdot \frac{1}{4}g^2} = \frac{2(u^2 - gh)}{g^2}.$$

が存在する。これは正であるから（$h \geq 0$ ならば $u^2 > 2gh \geq gh$ であり、$h < 0$ ならば自明である）、実際の時刻 $t > 0$ を与える。あとは、ある角 θ によって、$x = u\sqrt{u^2 - 2gh}/g$ のもとでこの時刻が実現されることを確かめなければならない。2 つの成分の式から、

$$\sin\theta = \frac{h + \frac{1}{2}gt^2}{ut}, \qquad \cos\theta = \frac{x}{ut}.$$

が必要である。上で求めた t^2 の値を用いると $h + \frac{1}{2}gt^2 = h + (u^2 - gh)/g = u^2/g$ であるから、

$$\sin\theta = \frac{u}{gt}, \qquad \cos\theta = \frac{\sqrt{u^2 - 2gh}}{gt}.$$

考えてみよう $\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値を別々に定めた。その両方をもつ角が 1 つ存在することは、どうしてわかるのか。

どちらの値も正であり、t^2 の値から

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{u^2 + u^2 - 2gh}{g^2t^2} = \frac{2(u^2 - gh)}{g^2t^2} = 1$$

が成り立つ。したがって、条件を満たす角 θ は 0 と $\frac{1}{2}\pi$ の間にちょうど 1 つ存在し、それは

$$\tan\theta = \frac{u}{\sqrt{u^2 - 2gh}}.$$

で与えられる。この角で発射すれば、砲弾は時刻 t に高さ h にあり、水平距離はちょうど $u\sqrt{u^2 - 2gh}/g$ となる。よって $u^2 > 2gh$ のとき、上界は常に達成される。

$h > 0$ のときは $\tan\theta > 1$ であることに注意しよう。大砲より高いある高さで最も遠くまで届かせるには、45° より急な角度で発射すればよいのである。また、その瞬間の鉛直方向の速度は $u\sin\theta - gt = (u^2 - g^2t^2)/(gt) = (2gh - u^2)/(gt) < 0$ であるから、砲弾は落下する途中で高さ h における最遠点に達する。

検算

- $h = 0$ のとき上界は u^2/g、$\tan\theta = 1$ となる。これは水平な地面上でのおなじみの最大到達距離で、45° のときに得られる。

- $u = 20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$、$h = 10\,\mathrm{m}$ のとき、上界は約 29.15 m で、$\theta \approx 54.5^\circ$ のときに得られる。
- 無作為に選んだ軌道に沿って 4 次方程式が成り立つこと、また数千通りの発射角を走査しても上界を超えることはないが、上界との差は 10^{-4} 以内まで迫ることを数値的に確かめた。上で求めた角では上界にちょうど一致する。

よくある間違い

- x を θ で微分して最適な θ を求めようとすること。それも可能だが、計算が煩雑になる。判別式が最適化を代わりにやってくれるのである。
- 最後の段階を忘れること。判別式が 0 であることから t の値は得られるが、それを実現する実数の角が存在することを、$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を確かめることで示さなければならない。

STEP のその先へ

速さ u で発射された砲弾が到達できる点全体は、すべての軌道の**包絡線**（envelope）、すなわち「安全放物線」（parabola of safety）$y = \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2}$ で囲まれた領域をなす。ここで得た上界を変形すると、(x, h) に到達可能であるのは、それがこの放物線上またはその下側にあるとき、かつそのときに限ることがわかる。曲線族の包絡線も同じ「重解」の考え方から得られ、変分法（calculus of variations）や光学（コースティクス、caustics）にも再び現れる。放物運動とその背後にある力学についてさらに知りたい場合は、Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。