解答例

STEP I 1994、第 8 問

純粋数学 ・ 置換積分

> **STEP I 1994、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/94-s1-q8

鍵となる考え方

置換（substitution）$\theta = \frac{1}{4}\pi - \phi$ は区間 $[0, \frac{1}{4}\pi]$ をそれ自身へ折り返し、加法定理（addition formula）により $1 + \tan(\frac{1}{4}\pi - \phi)$ は $2/(1 + \tan\phi)$ に変わる。こうして右辺に同じ積分が負の符号付きで再び現れるので、難しい積分を実行しなくても、その積分について方程式を解けばよい。後半の二つの積分は、この同じ積分が姿を変えたものである。一方は $x = \tan\theta$ とおいた後に、もう一方は半角の公式（half-angle formulae）を使った後にそれがわかる。

解答

一つ目の積分

この積分を I とおく。$\theta = \frac{1}{4}\pi - \phi$ とおくと $\mathrm{d}\theta = -\mathrm{d}\phi$ であり、$\theta = 0$ のとき $\phi = \frac{1}{4}\pi$、$\theta = \frac{1}{4}\pi$ のとき $\phi = 0$ である。よって

$$I = \int_{\frac{1}{4}\pi}^{0} \ln(1 + \tan(\tfrac{1}{4}\pi - \phi))\,(-\mathrm{d}\phi) = \int_{0}^{\frac{1}{4}\pi} \ln(1 + \tan(\tfrac{1}{4}\pi - \phi))\,\mathrm{d}\phi.$$

加法定理と $\tan\frac{1}{4}\pi = 1$ を用いると

$$1 + \tan(\tfrac{1}{4}\pi - \phi) = 1 + \frac{1 - \tan\phi}{1 + \tan\phi} = \frac{2}{1 + \tan\phi}.$$

（$[0, \frac{1}{4}\pi]$ 上では $\tan\phi \geq 0$ であるから、分母が 0 になることはなく、対数の中身はすべて正である。）したがって

$$I = \int_{0}^{\frac{1}{4}\pi} (\ln 2 - \ln(1 + \tan\phi))\,\mathrm{d}\phi = \tfrac{1}{4}\pi \ln 2 - I,$$

となる。最後の積分は、積分変数（dummy variable）の名前を変えただけで再び I だからである。

> **考えてみよう** 原始関数（antiderivative）は一度も求めていない。なぜそれでよいのだろうか？

原始関数は必要ない。I は単なる一つの数であり、置換によってその数が満たすべき方程式 $I = \frac{1}{4}\pi \ln 2 - I$ が得られる。これを解くと

$$2I = \tfrac{1}{4}\pi \ln 2 \quad \Longrightarrow \quad \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \ln(1+\tan\theta)\,\mathrm{d}\theta = \tfrac{1}{8}\pi \ln 2,$$

となり、示すべき式が得られた。

$1+x^2$ を含む積分

因子 $\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ から $x = \tan\theta$ とおくことが思いつく。このとき $\mathrm{d}x = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta = (1+x^2)\,\mathrm{d}\theta$ である。積分区間の端 $x=0$ と $x=1$ はそれぞれ $\theta = 0$ と $\theta = \frac{1}{4}\pi$ になる。よって

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \ln(1+\tan\theta)\,\mathrm{d}\theta = \tfrac{1}{8}\pi \ln 2.$$

$\sin x$ と $\cos x$ を含む積分

この積分を J とおく。最も速いのは対称性（symmetry）を使う方法である。$x = \frac{1}{2}\pi - u$ と置換すると sin と cos が入れ替わり、$[0, \frac{1}{2}\pi]$ はそれ自身に移るので

$$J = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln\left(\frac{1+\cos u}{1+\sin u}\right)\mathrm{d}u = -J,$$

となり、したがって $J = 0$ である。（同じことだが、$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(1+\sin x)\,\mathrm{d}x$ と $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(1+\cos x)\,\mathrm{d}x$ は等しいので、その差は 0 である。）

> **考えてみよう** 一つ目の結果はどこで使われるのだろうか？

J が I とどう結びついているかを見ておく価値はある。問題がこの積分をここに置いているのは、おそらくそのためである。$t = \frac{1}{2}x$ とおくと、半角の公式から

$$1+\cos x = 2\cos^2 t, \qquad 1+\sin x = (\cos t + \sin t)^2,$$

であるから

$$\frac{1+\sin x}{1+\cos x} = \frac{(\cos t+\sin t)^2}{2\cos^2 t} = \tfrac{1}{2}(1+\tan t)^2.$$

x が $[0, \frac{1}{2}\pi]$ を動くとき t は $[0, \frac{1}{4}\pi]$ を動き、$\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}t$ である。よって

$$J = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} (2\ln(1+\tan t) - \ln 2)\, 2\,\mathrm{d}t = 4I - \tfrac{1}{2}\pi\ln 2 = \tfrac{1}{2}\pi\ln 2 - \tfrac{1}{2}\pi\ln 2 = 0,$$

となり、対称性による議論と一致する。したがって

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right) \mathrm{d}x = 0.$$

検算

シンプソンの公式（Simpson's rule）で数値計算すると、tan を含む積分と $1+x^2$ を含む積分はどちらも 0.2721982613 となり、$\frac{1}{8}\pi\ln 2 = 0.2721982613\ldots$ と一致する。三つ目の積分は計算機の精度の範囲で 0 となる。手計算による大まかな確認もできる。被積分関数（integrand）$\ln(1+\tan\theta)$ は 0 から $\ln 2$ まで増加するので、I はおよそ $\frac{1}{4}\pi\ln 2$ の半分になるはずである。答えはちょうどその値である。

よくある間違い

- $\mathrm{d}\theta = -\mathrm{d}\phi$ であることと積分区間の端が入れ替わることの一方を忘れる。二つの符号の変化は打ち消し合う。一方だけを考慮すると $I = -\frac{1}{4}\pi\ln 2 - I$ となってしまう（そして正の値をとる積分に負の答えが出る）。
- $\tan(\frac{1}{4}\pi - \phi) = 1 - \tan\phi$ と書いてしまい、加法定理の分母を忘れる。
- $x \mapsto \frac{1}{2}\pi - x$ という対称性に気づかず、三つ目の積分に長い時間を費やす。

STEP のその先へ

折り返しの置換を行い、その結果をもとの積分と足し合わせる技法、すなわち $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x$ を利用する技法は、文献によってはキング・プロパティ（King property）と呼ばれる。この技法からは、有名な $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln\sin x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\pi\ln 2$ も得られる。大学では、このような結果はパラメータを含む定積分の理論や周回積分（contour integration）の理論の中に位置づけられ、そこでは原始関数を求めることなく、積分の族がまとめて計算される。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析の入門書）は複素関数の手法からこうした結果がどのように得られるかを示しており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策の問題集）には、このような対称性の技法を使う STEP 形式の演習がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。