解答例

STEP I 1994、第 6 問

純粋数学 • 複素関数の合成

> **STEP I 1994、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/94-s1-q6

鍵となる考え方

商の実部（real part）と虚部（imaginary part）を求めるには、分母の共役複素数（complex conjugate）を分子と分母に掛ければよい。x が実数であれば、その共役は容易に書き下せる。繰り返し適用した関数については、(i) で得た煩雑な実部と虚部をもう一度式に代入するよりも、一般の z に対して f をそれ自身と**代数的に**合成（composition）するほうがはるかに見通しがよい。$\mathrm{f}(\mathrm{f}(z))$ を整った形にしてしまえば、最後の小問は 1 行の代入で済む。

解答

x は実数なので、$\mathrm{i}x+1$ の実部は 1 である。よってこれは決して 0 にならず、$\mathrm{f}(x)$ はすべての実数 x に対して定義される。

小問 (i)

x は実数なので、$\mathrm{i}x+1$ の共役は $1-\mathrm{i}x$ である。これを分子と分母に掛けると、

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(x) = \frac{(\mathrm{i}x-1)(1-\mathrm{i}x)}{(1+\mathrm{i}x)(1-\mathrm{i}x)} &= \frac{\mathrm{i}x+x^2-1+\mathrm{i}x}{1+x^2} \\ &= \frac{x^2-1}{x^2+1} + \mathrm{i}\,\frac{2x}{x^2+1}.\end{aligned}$$

どちらの分数も実数であるから、これらが求める実部と虚部である。

小問 (ii)

任意の複素数 w に対して $ww^* = (\operatorname{Re} w)^2 + (\operatorname{Im} w)^2$ が成り立つ。小問 (i) を用いると、

$$\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(x)^* = \frac{(x^2-1)^2+4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+2x^2+1}{(x^2+1)^2} = 1.$$

したがって $|\mathrm{f}(x)| = 1$ である。すなわち、f はすべての実数を単位円（unit circle）上の点に移す。

小問 (iii)

(i) の答えを f に代入するのではなく、一般の z に対して合成を行う。$w = \mathrm{f}(z) = \dfrac{\mathrm{i}z-1}{\mathrm{i}z+1}$ とおき、$\mathrm{f}(w) = \dfrac{\mathrm{i}w-1}{\mathrm{i}w+1}$ の分子と分母に $\mathrm{i}z+1$ を掛けると、

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(\mathrm{f}(z)) &= \frac{\mathrm{i}(\mathrm{i}z-1)-(\mathrm{i}z+1)}{\mathrm{i}(\mathrm{i}z-1)+(\mathrm{i}z+1)} = \frac{-z-\mathrm{i}-\mathrm{i}z-1}{-z-\mathrm{i}+\mathrm{i}z+1} \\ &= \frac{-(1+\mathrm{i})(z+1)}{(1-\mathrm{i})(1-z)} = \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\cdot\frac{z+1}{z-1} = \mathrm{i}\,\frac{z+1}{z-1},\end{aligned}$$

となる。ここで $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \dfrac{(1+\mathrm{i})^2}{2} = \mathrm{i}$ を用いた。

考えてみよう $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))$ はすべての実数 x に対して定義されるだろうか？

そうではない。$\mathrm{i}w+1 \neq 0$、すなわち $\mathrm{f}(x) \neq \mathrm{i}$ が必要である。小問 (i) より、$\mathrm{f}(x) = \mathrm{i}$ となるには $x^2-1=0$ かつ $2x = x^2+1$ でなければならず、これが起こるのは $x=1$ のときだけである。これは上の分母にある因数 $x-1$ と符合している。よって実数 $x \neq 1$ に対して、

$$\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = \mathrm{i}\,\frac{x+1}{x-1}, \qquad \text{よって} \qquad \operatorname{Re}\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = 0, \quad \operatorname{Im}\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = \frac{x+1}{x-1}.$$

実軸（real axis）は 1 回目の f の適用で単位円に移され、単位円は 2 回目の適用で虚軸（imaginary axis）に移される。

小問 (iv)

$y = \dfrac{x+1}{x-1}$ を実数として $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = \mathrm{i}y$ と書く。すると $\mathrm{i}(\mathrm{i}y) = -y$ であるから、

$$\mathrm{f}(\mathrm{i}y) = \frac{-y-1}{-y+1} = \frac{y+1}{y-1}.$$

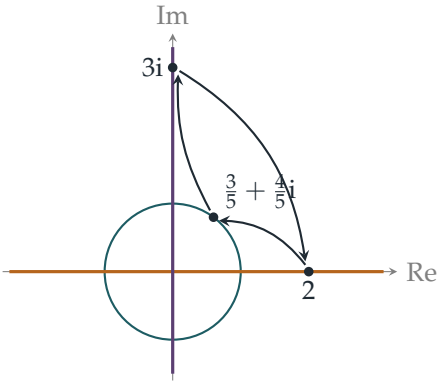
$y=1$ となるには $x+1 = x-1$ でなければならず、これは不可能なので、この式は定義される。ここで

$$y+1 = \frac{2x}{x-1}, \qquad y-1 = \frac{2}{x-1},$$

であるから、

$$\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))) = x \qquad \text{すべての実数} x \neq 1.$$

f を 3 回適用すると出発点に戻る。3 回目の適用によって虚軸は実軸に戻されるのである。下の図は $x = 2$ の場合の巡回を示しており、$2 \mapsto \frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mathrm{i} \mapsto 3\mathrm{i} \mapsto 2$ となる。



検算

- $x = 0$：$\mathrm{f}(0) = -1$ であり、これは単位円上にあって (i) と一致する。次に $\mathrm{f}(-1) = \dfrac{-\mathrm{i} - 1}{-\mathrm{i} + 1} = -\mathrm{i}$ となり、$\mathrm{i}\frac{0+1}{0-1}$ と一致する。さらに $\mathrm{f}(-\mathrm{i}) = \frac{1-1}{1+1} = 0$ である。
- $x = 2$：小問 (i) から $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mathrm{i}$、小問 (iii) から 3i が得られ、小問 (iv) で 2 に戻る。10^4 個の無作為な実数 x（および無作為な複素数 z）による数値検証でも、上のすべての式が丸め誤差の範囲で確かめられた。

よくある間違い

- (i) で得た実部と虚部をそのまま f に代入してしまうこと。それでも答えは出るが、計算が重く間違えやすい。z を用いて合成するほうがはるかに見通しがよい。
- (iii) と (iv) で $x = 1$ を除外し忘れること。$\mathrm{f}(1) = \mathrm{i}$ であり、f(i) は分母が 0 になるからである。

STEP のその先へ

$z \mapsto \dfrac{az + b}{cz + d}$ の形の関数を**メビウス変換**（Möbius transformation）という。このような写像は円と直線を円と直線に移す。ここで見たとおり、実軸は単位円に、単位円は虚軸に移り、そして再び実軸に戻った。2 つのメビウス変換の合成は、2×2 行列

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の積に対応する。実は、すべての複素数 z に対して $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathrm{f}(z))) = z$ が成り立つので、f はメビウス変換のなす群（group）において位数（order）3 をもつ。また、(i) で $x = \tan\frac{\theta}{2}$ とおくと $\mathrm{f}(x) = -\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ となる。これはおなじみの「t 置換」による円のパラメータ表示（parametrisation）である。Needham の *Visual Complex Analysis* には、メビウス変換とその幾何についての見事な章がある。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。