解答例

STEP I 1994、第 5 問

純粋数学 ・ 放物線上の軌跡

> **STEP I 1994、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/94-s1-q5

鍵となる考え方

まず幾何的な条件を代数に直す。原点で直角をなすということは、位置ベクトル（position vector）$\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ が垂直であるということであり、$y = x^2$ 上の点に対しては、これが p と q の間のひとつの簡潔な関係式に帰着する。すると点 R と T の座標はどちらも p と q について対称になるので、すべてを $p+q$ と pq で表し、文字を消去すればよい。

解答

直角となるための条件

P も Q も原点ではありえない。原点であれば角が定義されないからである。よって $p \neq 0$ かつ $q \neq 0$ である。角 POQ が直角となるのは、$\overrightarrow{OP} = (p, p^2)$ と $\overrightarrow{OQ} = (q, q^2)$ の内積（scalar product）が 0 となるときであり、そのときに限る：

$$pq + p^2q^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad pq(1+pq) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad pq = -1,$$

ここで $pq \neq 0$ で割った。（同値な言い方をすれば、OP と OQ の傾き（gradient）p と q の積が -1 になるということである。）

したがって、求める組はちょうど $p \neq 0$ かつ $q = -1/p$ を満たすものである。p が 0 でない実数全体を動くとき、和

$$s = p + q = p - \frac{1}{p}$$

はあらゆる実数値をとる。実際、任意の s に対して、2 次方程式 $p^2 - sp - 1 = 0$ の判別式（discriminant）は $s^2 + 4 > 0$ であるから実数解をもち、その積は -1 なので、ど

ちらの解も 0 ではない。このことは、以下で求める軌跡（locus）が曲線の一部ではなく曲線全体であることを言うのに必要になる。

小問 (i)

PQ の中点（midpoint）は

$$R = \left(\frac{p+q}{2}, \frac{p^2+q^2}{2} \right).$$

である。$R = (x, y)$ とおくと $p + q = 2x$ である。$pq = -1$ を用いると

$$y = \frac{(p+q)^2 - 2pq}{2} = \frac{4x^2+2}{2} = 2x^2 + 1.$$

$p + q$ はあらゆる実数値をとるので x もそうであり、R の軌跡は放物線（parabola）

$$y = 2x^2 + 1,$$

の全体である。頂点（vertex）は $(0, 1)$、軸（axis）は y 軸である。$2x^2 + 1 - x^2 = x^2 + 1 > 0$ であるから、この放物線は $y = x^2$ より幅が狭く、全体が $y = x^2$ より上にある。これは、R が凸（convex）な曲線の弦（chord）の中点であることと整合している。

小問 (ii)

$y = x^2$ を微分すると、P における接線（tangent）の傾きは $2p$ であるから、その方程式は

$$y - p^2 = 2p(x - p), \qquad \text{すなわち} \qquad y = 2px - p^2,$$

であり、同様に Q における接線は $y = 2qx - q^2$ である。$p \neq q$ であるから（積が -1 なので両者は等しくなりえない）、これらは平行ではない。2 つの方程式の差をとると

$$2(p-q)x = p^2 - q^2 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{p+q}{2},$$

ここで $p - q \neq 0$ で割った。すると

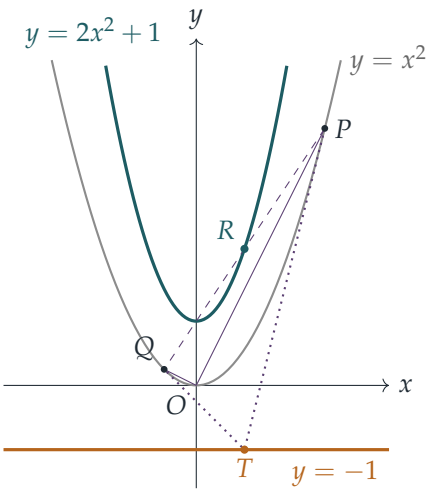
$$y = 2p \cdot \frac{p+q}{2} - p^2 = pq = -1.$$

考えてみよう T の y 座標は一定である。では軌跡は 1 点なのか、線分なのか、それとも直線全体なのか。

T の x 座標は $\frac{1}{2}(p+q)$ であり、これはあらゆる実数値をとることをすでに示した。よって T はこの直線上のどこにでもなりうるので、T の軌跡は直線

$$y = -1.$$

の全体である。また、T はつねに R の真下にあることにも注意しよう。どちらも x 座標が $\frac{1}{2}(p+q)$ だからである。



図は $p = 2, q = -\frac{1}{2}$ の場合のひとつの配置を示している。このとき $R = (\frac{3}{4}, \frac{17}{8})$ はティール色の放物線上に、$T = (\frac{3}{4}, -1)$ は琥珀色の直線上にある。

検算

$p = 1, q = -1$ とすると、$P = (1,1), Q = (-1,1)$ であり、OP, OQ は直線 $y = \pm x$ なので明らかに垂直である。中点は $(0,1)$ で、これは $y = 2x^2 + 1$ の頂点である。また接線 $y = 2x - 1$ と $y = -2x - 1$ は $(0,-1)$ で交わり、これは $y = -1$ 上にある。図と同じく $p = 2, q = -\frac{1}{2}$ とすると、$2 \cdot (\frac{3}{4})^2 + 1 = \frac{17}{8}$ となり、確かに正しい。p の 10^5 個のランダムな値で数値的に確かめたところ、R は約 10^{-10} の誤差の範囲で $y = 2x^2 + 1$ を満たし、T はつねに $y = -1$ を満たした。

よくある間違い

- $pq(1 + pq) = 0$ で止めてしまい、$pq = 0$ が除外される理由を説明しないこと。$pq = 0$ だと P または Q が原点に来てしまう。
- すべての x が実際にとられることを確かめずに軌跡の方程式を答え、図が曲線の一部ではなく全体であることの根拠を欠くこと。
- T が準線（directrix）上にあると思い込むこと。$y = x^2$ の準線は $y = -\frac{1}{4}$ である。接線どうしがそこで交わるのは PQ が焦点（focus）を通るときであり、これは $\angle POQ = 90°$ とは別の条件である。

STEP のその先へ

ここでの弦 PQ はつねに定点 $(0,1)$ を通る。実際、その方程式は $y=(p+q)x-pq=(p+q)x+1$ である。定点を通る直線の族と、それに対応して接線どうしが交わる「極」(pole)（ここでは $(0,1)$ の極線（polar）である直線 $y=-1$ 上にある）は、射影幾何学（projective geometry）の出発点である。射影幾何学では、円錐曲線（conic）とその極と極線の関係が体系的に研究される。この趣旨の問題をさらに解きたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（数学の上級問題集）に取り組んでみるとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。