解答例

STEP I 1994、第 4 問

純粋数学 ・ 逆正接関数の積分

> **STEP I 1994、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/94-s1-q4

鍵となる考え方

小問 (i) は半角の公式（half-angle identity）であり、小問 (ii) は「平方完成（complete the square）してから $\tan^{-1}$ を用いる」という定番の積分である。最後の積分は小問 (ii) で $k = \cos\alpha$ とおいたものであり、このとき $\sqrt{1-k^2} = \sin\alpha$ となって分子の因数 $\sin\alpha$ と打ち消し合う。本当に注意が必要なのは最後の部分だけである。正接の値に $\tan^{-1}$ を施して元の角が戻ってくるのは、その角が $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ に属するときに限られる。

解答

小問 (i)

倍角の公式（double-angle formulae）$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{1}{2}\alpha$ と $\sin\alpha = 2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha$ を用いると、

$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2\sin^2\frac{1}{2}\alpha}{2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha} = \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\alpha} = \tan\tfrac{1}{2}\alpha,$$

となり、これは $\sin\alpha \neq 0$ のとき（したがって両辺が定義されるとき）常に成り立つ。これが示すべきことであった。

小問 (ii)

分母を平方完成する。

$$1 - 2kx + x^2 = (x-k)^2 + (1-k^2).$$

$|k| < 1$ であるから定数 $1-k^2$ は正であり、$a = \sqrt{1-k^2} > 0$ として $1-k^2 = a^2$ と書ける。（条件 $|k| < 1$ が使われるのはまさにここである。そうでなければ分母は因数分解

でき、代わりに対数が現れる。）$x-k=a\tan\theta$ と置換すると $\mathrm{d}x=a\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$ であるから、

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-k)^2+a^2}&=\int\frac{a\sec^2\theta}{a^2\tan^2\theta+a^2}\,\mathrm{d}\theta=\int\frac{1}{a}\,\mathrm{d}\theta=\frac{\theta}{a}+C\\&=\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\tan^{-1}\left(\frac{x-k}{\sqrt{1-k^2}}\right)+C,\end{aligned}$$

となり、求める結果を得る。（同じことだが、右辺を微分してもよい。合成関数の微分法（chain rule）により $\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1/a}{1+(x-k)^2/a^2}=\dfrac{1}{(x-k)^2+a^2}$ となる。）

最後の積分

$k=\cos\alpha$ とおく。$0<\alpha<\pi$ であるから $|k|<1$ となり、小問 (ii) が適用できる。さらに $\sin\alpha>0$ より

$$\sqrt{1-k^2}=\sqrt{\sin^2\alpha}=\sin\alpha$$

である（この区間では $\sin\alpha>0$ なので、$-\sin\alpha$ ではない）。したがって、分子の因数 $\sin\alpha$ は小問 (ii) の因数 $1/\sqrt{1-k^2}$ と打ち消し合う。

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}\,\mathrm{d}x&=\left[\tan^{-1}\left(\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\right]_0^1\\&=\tan^{-1}\left(\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\\&=\tan^{-1}(\tan\tfrac{1}{2}\alpha)+\tan^{-1}(\cot\alpha),\end{aligned}$$

ここで、第 1 項には小問 (i) を、第 2 項には $\tan^{-1}$ が奇関数（odd function）であることを用いた。

考えてみよう $\tan^{-1}(\tan\theta)$ は常に θ に等しいだろうか？

そうではない。$\tan^{-1}$ の値域は $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ であるから、$\tan^{-1}(\tan\theta)=\theta$ が成り立つのは θ がこの区間に属するときだけである。各項を確かめよう。

- $0<\alpha<\pi$ より $0<\frac{1}{2}\alpha<\frac{\pi}{2}$ であるから、$\tan^{-1}\left(\tan\frac{1}{2}\alpha\right)=\frac{1}{2}\alpha$ である。
- $\cot\alpha=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ と書く。$0<\alpha<\pi$ より角 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ は $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ に属するから、$\tan^{-1}(\cot\alpha)=\frac{\pi}{2}-\alpha$ である。

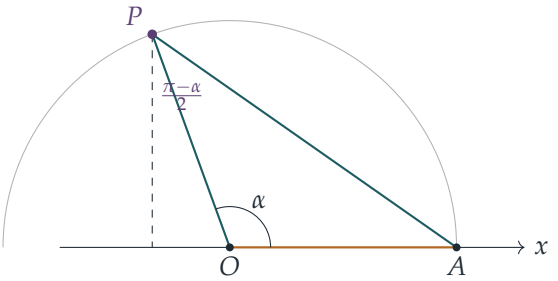
これらを足し合わせると、

$$\int_0^1\frac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}-\alpha=\frac{\pi-\alpha}{2},$$

となり、これが求める結果である。

別解：図で考える

この答えには美しい幾何学的な理由がある。単位円（unit circle）上の点を $P = (\cos\alpha, \sin\alpha)$、原点を O、$A = (1,0)$ とする。点 $X = (x,0)$ が x 軸上を動くとき、PX と P を通る下向きの鉛直線とのなす角 θ は $\tan\theta = (x - \cos\alpha)/\sin\alpha$ を満たし、被積分関数（integrand）はちょうど $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x$ になっている。したがって積分の値は、X が O から A まで動く間に掃く角、すなわち角 OPA である。三角形 OPA は $OP = OA = 1$ で O における頂角（apex angle）が α の二等辺三角形（isosceles triangle）であるから、その底角（base angles）はどちらも $\frac{1}{2}(\pi - \alpha)$ である。



検算

- $\alpha = \frac{\pi}{2}$ のとき積分は $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$ であり、公式からも $\frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$ が得られる。
- 数値的には、$\alpha = 1$ のときシンプソンの公式（Simpson's rule）により $1.0707963\ldots$ が得られ、$\frac{1}{2}(\pi - 1) = 1.0707963\ldots$ と一致する。
- $\alpha \to \pi^-$ のとき、$[0,1]$ の各 x について被積分関数は 0 に近づき、$\frac{1}{2}(\pi - \alpha)$ も同様に 0 に近づく。

よくある間違い

- $\frac{\pi}{2} - \alpha$ が $\tan^{-1}$ の値域に属することを確かめずに $\tan^{-1}(\cot\alpha) = \frac{\pi}{2} - \alpha$ と書いてしまう。α が $(0,\pi)$ の外にあると、同じ変形は成り立たない。
- 理由を述べずに $\sqrt{1-\cos^2\alpha} = |\sin\alpha|$ を $\sin\alpha$ としてしまう。ここでそうできるのは $0 < \alpha < \pi$ だからである。

STEP のその先へ

$\alpha \to 0^+$ のとき答えは $\frac{\pi}{2}$ に近づくが、$\alpha = 0$ では被積分関数は恒等的に 0 である。被積分関数は $x = 1$ の近くで高く細い尖りとなり、その面積は小さくならないのである。これは上半平面のポアソン核（Poisson kernel）であり、極限と積分の順序を不用意に交換すると誤った答えが得られる。このような交換がいつ許されるかは、大学 1 年次の解析学（analysis）の中心的な問題である。Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を参照されたい。幾何学的な「見込む角」の描像は、Needham, *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）で見事に展開されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。