解答例

STEP I 1994、第 2 問

純粋数学 ・ 対数微分法

> **STEP I 1994、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/94-s1-q2

鍵となる考え方

べき関数の微分法則（power rule）は、変数が底にあり指数が固定されているときに使える。指数関数の微分法則は、底が固定され変数が指数にあるときに使える。x が両方の場所に現れた途端、どちらの法則もそのままでは使えなくなる。対処法は、すべてを e のべきとして書き直すこと、あるいは同じことであるが、対数をとって陰関数微分（implicit differentiation）を行うことである。対数は扱いにくいべきを積に変え、積ならば扱うことができる。

以下では常に $x > 0$ とする（そうでなければ x^x や $\ln x$ は意味をもたない）。また、(ii) では底 a は正でなければならない。

解答

繰り返し用いる道具はただ一つである。$u > 0$ に対して

$$u^v = \mathrm{e}^{v \ln u},$$

であるから、$y = u^v$ ならば $\ln y = v \ln u$ であり、合成関数の微分法（chain rule）を用いて微分すると $\dfrac{1}{y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(v \ln u)$ が得られる。

小問 (i)

ここでは指数が定数なので、これは通常のべき関数の微分法則である。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, x^a = a\, x^{a-1}.$$

これが（整数に限らず）任意の実数 a について成り立つ理由を確かめたければ、$x^a = \mathrm{e}^{a\ln x}$ と書けばよい。合成関数の微分法により $\mathrm{e}^{a\ln x}\cdot\frac{a}{x} = a\,x^a/x = a\,x^{a-1}$ となる。

小問 (ii)

今度は底が定数である。$\ln a$ は単なる定数であることに注意して $a^x = \mathrm{e}^{x\ln a}$ と書くと、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,a^x = \ln a\;\mathrm{e}^{x\ln a} = a^x\ln a.$$

(i) とはまったく異なることに注意せよ。これは $x\,a^{x-1}$ ではない。

小問 (iii)

$y = x^x$ とおく。対数をとると $\ln y = x\ln x$ である。右辺には積の微分法（product rule）を用いて両辺を微分すると、

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} = 1+\ln x,$$

したがって

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,x^x = x^x\,(1+\ln x).$$

考えてみよう なぜ単純にべき関数の微分法則を用いて $x\cdot x^{x-1} = x^x$ としてはいけないのか？

べき関数の微分法則は指数が定数であることを、指数関数の微分法則は底が定数であることを前提としている。ここでは両方が変化する。実は、答えはちょうど二つの「誤った」答えの和になっている。指数を固定したものとして扱うと $x\cdot x^{x-1} = x^x$ が得られ、底を固定したものとして扱うと $x^x\ln x$ が得られ、真の導関数は $x^x + x^x\ln x$ である。これは多変数の合成関数の微分法（multivariable chain rule）が姿を変えて現れたものである。$y = u^v$ のとき、各変数がそれぞれ自身の変化率の分だけ寄与するのである。

小問 (iv)

$y = x^{(x^x)}$ とおく。これは指数そのものが x^x であるような累乗の塔である。対数をとると、

$$\ln y = x^x\ln x.$$

右辺を積の微分法で微分し、x^x の導関数には (iii) を用いると、

$$\begin{aligned}\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= x^x(1+\ln x)\cdot\ln x + x^x\cdot\frac{1}{x}\\ &= x^x\left(\frac{1}{x}+\ln x+(\ln x)^2\right).\end{aligned}$$

$y = x^{(x^x)}$ を掛け、x のべきをまとめると、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,x^{(x^x)} = x^{(x^x)}\,x^x\left(\frac{1}{x}+\ln x+(\ln x)^2\right) = x^{x^x+x}\left(\frac{1}{x}+\ln x+(\ln x)^2\right).$$

同値な形として、$\frac{1}{x}$ を括弧の外に出せば $x^{x^x+x-1}(1+x\ln x+x(\ln x)^2)$ となる。

小問 (v)

考えてみよう $(x^x)^x$ は (iv) の式と同じではないのか？

同じではない。指数法則（law of indices）$(u^m)^n = u^{mn}$ により $(x^x)^x = x^{x\cdot x} = x^{x^2}$ であるのに対し、(iv) では指数は x^2 ではなく x^x である。両者は $x=1$ と $x=2$ ではたまたま一致する（$x=2$ ではどちらも 16 になる）が、$x=3$ では一方は 3^{27}、もう一方はわずか 3^9 である。

そこで $y = x^{x^2}$ とおく。すると $\ln y = x^2\ln x$ であり、積の微分法により

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x\ln x + x^2\cdot\frac{1}{x} = x\,(1+2\ln x).$$

よって

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,(x^x)^x = x^{x^2}\cdot x\,(1+2\ln x) = x^{x^2+1}\,(1+2\ln x).$$

（代わりに $(x^x)^x$ を直接微分してもよい。$\ln y = x\ln(x^x) = x^2\ln x$ となり、同じことである。）

検算

- $x=1$ では (iii)、(iv)、(v) のいずれも導関数の値は 1 となる。たとえば (iv) では $1^{1+1}(1+0+0)=1$ である。中心差分 $\big(f(1.000001)-f(0.999999)\big)/0.000002$ もこれと一致する。
- x^x は $1+\ln x=0$ となる $x=\mathrm{e}^{-1}$ で最小値をとり、$(x^x)^x = x^{x^2}$ は $1+2\ln x=0$ となる $x=\mathrm{e}^{-1/2}$ で最小値をとる。どちらもグラフ電卓で確認できる。
- すべての公式を、$0.2\le x\le 2.5$（および $0.2\le a\le 4$）を満たす無作為に選んだ 2000 個の点で数値微分と比較した。相対誤差は常に 10^{-9} 未満であった。

よくある間違い

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^x = x \cdot x^{x-1}$ や $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^x = x\,a^{x-1}$ と書いてしまう。べき関数の微分法則には定数の指数が必要である。
- (iv) と (v) を同じ関数として扱ってしまう。べき乗は結合的（associative）ではない。一般に $x^{(x^x)} \neq (x^x)^x$ である。
- $\ln y$ を微分した後に y を掛け戻すのを忘れる。

STEP のその先へ

そもそも a が無理数のとき、たとえば $x^{\sqrt{2}}$ のとき、x^a とは何を意味するのだろうか？

大学での答えは、まず exp をべき級数（power series）によって定義し、ln をその逆関数として定義したうえで、$u > 0$ に対して $u^v = \mathrm{e}^{v \ln u}$ と**定義する**ことである。すると指数法則のすべてと上で求めた導関数はみな定理となる。このことは Abbott, *Understanding Analysis*（解析学の入門書）や Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）で丁寧に扱われている。(iii) における「二つの誤った答えの和」は、偏導関数（partial derivative）と多変数の合成関数の微分法を初めて垣間見るものである。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。