解答例

STEP I 1994、第 14 問

確率・統計 ・ 指数分布の順序統計量

STEP I 1994、問 14

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/94-s1-q14

鍵となる考え方

各 T_i は指数分布（exponential distribution）に従うので、小問 (i) は標準的な部分積分（integration by parts）を 2 回行うだけである。最後のレポートと最初のレポートについては、最大値（maximum）や最小値（minimum）に関する主張を、**すべての** T_i に関する主張に言い換えるのがこつである。最後のレポートが時刻 u までに提出されているのは、すべてのレポートが提出されているときであり、かつそのときに限る。また、最初のレポートが時刻 t の時点でまだ提出されていないのは、すべてのレポートが未提出であるときであり、かつそのときに限る。そうすれば独立性（independence）によって「すべて」が積に変わり、分布関数（distribution function）を微分すれば確率密度関数（probability density function）が得られる。

解答

小問 (i)

T_i のうちどれか 1 つを X とおく。その確率密度関数は $t \geq 0$ に対して $f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$ である。$u = t$、$\mathrm{d}v = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$（したがって $v = -\mathrm{e}^{-\lambda t}$）として部分積分すると、

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^\infty t\,\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \Big[-t\mathrm{e}^{-\lambda t}\Big]_0^\infty + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = 0 + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda},$$

となる。ここで、$t \to \infty$ のとき $t\mathrm{e}^{-\lambda t} \to 0$ であることを用いた（指数関数はべき関数より速く増大する）。同様にして、

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_0^\infty t^2 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \Big[-t^2\mathrm{e}^{-\lambda t}\Big]_0^\infty + \int_0^\infty 2t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\lambda}\,\mathrm{E}(X) = \frac{2}{\lambda^2},$$

を得る。ここで $\int_0^\infty t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$ が $\frac{1}{\lambda}\mathrm{E}(X)$ に等しいことを用いた。したがって

$$\mathrm{E}(T_i) = \frac{1}{\lambda}, \qquad \mathrm{Var}(T_i) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

小問 (ii)

まず、1 つの T_i の分布関数が必要である。$u \geq 0$ に対して

$$\mathrm{P}(T_i \leq u) = \int_0^u \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda u}.$$

さて、$U = \max(T_1, \ldots, T_n)$ であり、T_i のうち最大のものが u 以下であるのは、それらがすべて u 以下であるときであり、かつそのときに限る。すなわち

$$\{U \leq u\} = \{T_1 \leq u\} \cap \{T_2 \leq u\} \cap \cdots \cap \{T_n \leq u\}.$$

考えてみよう ここで確率を掛け合わせてよいのはなぜか？

事象 $\{T_i \leq u\}$ はそれぞれ異なる T_i に関するものであり、仮定よりそれらは独立であるから、共通部分（intersection）の確率は各確率の積に等しい。よって、$u \geq 0$ に対して

$$\mathrm{P}(U \leq u) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(T_i \leq u) = (1 - \mathrm{e}^{-\lambda u})^n,$$

となり、これが示すべき式である。U の確率密度関数はこの分布関数の導関数である。合成関数の微分法（chain rule）により、

$$f_U(u) = n(1 - \mathrm{e}^{-\lambda u})^{n-1} \cdot \lambda \mathrm{e}^{-\lambda u} = n\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda u}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda u})^{n-1} \qquad (u \geq 0),$$

であり、$u < 0$ に対しては $f_U(u) = 0$ である。

小問 (iii)

今度は $T = \min(T_1, \ldots, T_n)$ である。ここで役に立つのは余事象（complement）である。最初のレポートが時刻 t より後に届くのは、その時点までに 1 つも届いていないとき、すなわちすべての T_i について $T_i > t$ であるときであり、かつそのときに限る。$\mathrm{P}(T_i > t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$ と、再び独立性を用いて、

$$\mathrm{P}(T > t) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(T_i > t) = (\mathrm{e}^{-\lambda t})^n = \mathrm{e}^{-n\lambda t} \qquad (t \geq 0).$$

よって $\mathrm{P}(T \leq t) = 1 - \mathrm{e}^{-n\lambda t}$ であり、これを微分して

$$f_T(t) = n\lambda\,\mathrm{e}^{-n\lambda t} \qquad (t \geq 0),$$

を得る。また $t < 0$ に対しては $f_T(t) = 0$ である。

小問 (iv)

(iii) の確率密度関数は、小問 (i) の確率密度関数において λ を $n\lambda$ に置き換えたものにほかならない。すなわち T はパラメータ $n\lambda$ の指数分布に従う。したがって小問 (i) から、ただちに

$$\mathrm{E}(T) = \frac{1}{n\lambda}, \qquad \mathrm{Var}(T) = \frac{1}{n^2\lambda^2}.$$

と書き下せる。これは直観にも合う。学生が n 人いれば、最初のレポートは特定の 1 人のレポートよりおよそ n 倍早く届くはずである。

検算

- $n = 1$ のときレポートは 1 つだけなので $T = U = T_1$ であり、実際どちらの確率密度関数も $\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}$ に帰着する。
- $\mathrm{P}(U \le u)$ は $u = 0$ での 0 から、$u \to \infty$ のとき 1 まで増加しており、分布関数として当然そうあるべき振る舞いをしている。
- $n = 5$、$\lambda = 0.7$ として 2×10^5 クラス分のシミュレーションを行った。たとえば $U \le 2$ となった割合は 0.2425 で、理論値 $(1 - \mathrm{e}^{-1.4})^5 \approx 0.2427$ と一致し、T の平均は 0.2860 で、理論値 $1/(5 \times 0.7) \approx 0.2857$ と一致した。また、シンプソンの公式（Simpson's rule）によって f_U の積分が 1 になることも確かめた。

よくある間違い

- 最小値について $\mathrm{P}(T \le t)$ を直接扱おうとすること。「少なくとも 1 つの T_i について $T_i \le t$」は共通部分ではないので、積に分解できない。$\mathrm{P}(T > t)$ を経由すること。
- 積にしてよい根拠が独立性であることを明記し忘れること。
- $\mathrm{Var}(T_i) = \mathrm{E}(T_i^2) = 2/\lambda^2$ と書いて、$(\mathrm{E}\,T_i)^2$ を引くのを忘れること。

STEP のその先へ

T と U は標本の最小および最大の**順序統計量**（order statistics）である。独立な指数分布に従う確率変数の最小値が、率（rate）を足し合わせた指数分布に従うという事実は、ポアソン過程（Poisson process）や待ち行列理論（queueing theory）の基礎となっている。さらに美しい事実として、無記憶性（memoryless property）から、相次ぐレポートの到着の間隔は、それぞれ率 $n\lambda, (n-1)\lambda, \ldots, \lambda$ の独立な指数分布に従うことがわかり、したがって $\mathrm{E}(U) = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$ となる。これらはどちらも

Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）、および Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）で詳しく扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。