解答例

STEP I 1994、第 11 問

力学 ・ 斜面上の連結質点

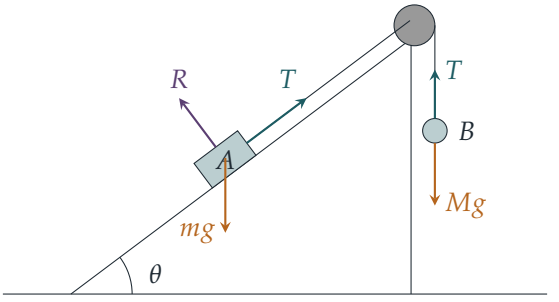
> **STEP I 1994、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/94-s1-q11

鍵となる考え方

まず幾何的な状況から考える。糸の長さは軌道（track）の長さにちょうど等しいので、台車（wagon）が軌道の下端にあるとき、球は滑車（pulley）のすぐ位置にぶら下がっている。したがって、球は斜面（incline）の高さ $d\sin\theta$ だけ落下し、台車は斜面に沿って同じ距離だけ上る。糸が張っている間、系は一定の加速度で運動する。球が着地すると糸はたるみ、台車はなめらかな斜面を惰性で上っていくだけになる。そこで小問 (ii) は、残った速さで台車が滑車まで残りの距離を上りきるかどうかを問うているのである。

解答

台車と球を質点とみなし、軌道はなめらかで、糸は軽くて伸び縮みせず、軽くて摩擦のない滑車にかけられているとモデル化する。したがって張力（tension）T は両側で等しく、糸が張っている間は台車と球の速さは等しい。



小問 (i)

球の下向きの加速度を a とする。これは台車の斜面に沿って上向きの加速度でもある。球（鉛直方向）と台車（斜面方向）についてニュートン（Newton）の運動の第 2 法則（Newton's second law）を書くと

$$Mg - T = Ma,$$
$$T - mg\sin\theta = ma.$$

となる。垂直抗力（normal reaction）R は斜面に垂直なので、この式には現れない。2 式を加えると T が消去されて

$$a = \frac{(M - m\sin\theta)\,g}{M + m}.$$

を得る。系は静止状態から動き始めるので、球が少しでも動くのは $a > 0$ のときに限る。（$a \leq 0$ ならば何も起こらない。$a = 0$ のとき系はつり合いの状態にとどまり、また糸は押すことができないので $a < 0$ はありえない。）したがって、球が地面まで落下するための必要十分条件は

$$M > m\sin\theta.$$

である。

台車が軌道の下端にあるとき、糸の全長 d が斜面に沿って張られているので、球は滑車と同じ高さ、すなわち地面から高さ $d\sin\theta$ の位置から動き始める。球は静止状態から一定の加速度 a でこの距離を落下するので、$v^2 = u^2 + 2as$ より

$$v^2 = 2 \cdot \frac{(M - m\sin\theta)g}{M + m} \cdot d\sin\theta = \frac{2g(M - m\sin\theta)\,d\sin\theta}{M + m},$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

球が地面に達したとき、台車は軌道に沿って $d\sin\theta$ だけ上っており、速さ v で運動している。滑車までは残り

$$d - d\sin\theta = d(1 - \sin\theta)$$

の距離がある。

考えてみよう 球が着地したあと、糸はどうなるか。

球は止まるが、台車はまだ斜面を滑車に向かって上っている。したがって糸はたるみ、$T = 0$ となる。このとき斜面方向にはたらく力は重力の成分だけなので、台車は大き

さ $g\sin\theta$ の加速度で減速する。台車は、$0 = v^2 - 2g\sin\theta\, s$ で与えられるさらに距離 s だけ進んで静止する。すなわち

$$s = \frac{v^2}{2g\sin\theta} = \frac{(M - m\sin\theta)\, d}{M + m}.$$

である。（その後、台車は斜面を下っていき、滑車の近くではそれ以上何も起こらない。）

台車が滑車に衝突しないのは、滑車に達する前に止まるとき、すなわち $s < d(1 - \sin\theta)$ のときである。$d > 0$ かつ $M + m > 0$ なので、これは

$$\begin{aligned} M - m\sin\theta &< (M + m)(1 - \sin\theta) \\ &= M + m - M\sin\theta - m\sin\theta, \end{aligned}$$

と同値であり、整理すると $M\sin\theta < m$ となる。

これを小問 (i) と合わせると、球が地面に達し、かつ台車が滑車の手前で止まるための必要十分条件は

$$m\sin\theta < M < \frac{m}{\sin\theta}.$$

である。$M\sin\theta = m$ のときは、台車は速さ 0 でちょうど滑車に達する。これは接触であって、衝突ではない。

検算

- 台車が軌道を上る最遠点は $d\sin\theta + s = \dfrac{Md(1 + \sin\theta)}{M + m}$ である。これが d より小さくなるのはちょうど $M\sin\theta < m$ のときであり、上の条件と一致する。$m \to 0$ のとき、これは $d(1 + \sin\theta) > d$ に近づく。重さのない台車は必ず滑車に衝突するということであり、予想どおりである。
- $\theta = 90^\circ$ のとき、条件 $M < m$ は小問 (i) の $M > m\sin\theta = m$ と矛盾する。これは正しい。鉛直な軌道では、台車は滑車の真下の下端から、球は上端から動き始め、台車は球が落下するのとちょうど同じ距離だけ上昇する。つまり滑車まで上りきってしまうのである。
- 数値で確かめると、$m = 2$, $M = 1.5$, $\theta = 30^\circ$, $d = 3$, $g = 9.8$ のとき、公式から $v^2 = 4.2$、最遠点は $\frac{27}{14} \approx 1.93 < 3$ となる。運動を小さな時間刻みで数値的に追っても同じ値が得られる。また、ランダムに選んだ場合についても、衝突が起こるのはちょうど $M\sin\theta > m$ のときであることが確認できる。

よくある間違い

- 球の落下距離を $d\sin\theta$ ではなく d としてしまう。球は滑車の位置から動き始め、滑車の高さは $d\sin\theta$ である。
- 球が着地したあとも糸が張ったままだと仮定してしまう、あるいは惰性で進む段階をすっかり忘れて $d\sin\theta$ と d だけを比較してしまう。
- 糸がたるんだあとの台車の減速の加速度に、$g\sin\theta$ ではなく g を用いてしまう。

STEP のその先へ

この問題では、運動を拘束条件の異なる段階、すなわち糸が張っている段階と糸がたるんだ段階とに分けている。これは、引くことはできても押すことはできない**片側拘束**（unilateral constraint）の最も簡単な例である。このような拘束は、机から滑り落ちる鎖からロボット工学における接触問題に至るまで、力学のいたるところに現れる。ここではエネルギーを用いる方法も手早い別解になる。惰性で進む段階では、台車の運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2$ が位置エネルギー $mgs\sin\theta$ に変わるのである。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、この両方の見方を丁寧に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。