解答例

STEP I 1994、第 10 問

力学 ・ 円運動

> **STEP I 1994、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/94-s1-q10

鍵となる考え方

これは伸び縮みする糸を用いた円錐振り子（conical pendulum）である。質点には鉛直方向の加速度がないので、張力（tension）の鉛直成分が重力とつり合い、水平成分が向心力（centripetal force）を与える。新しい点は、円の半径が伸び（extension）に依存し、その伸びが張力に依存することであり、フックの法則（Hooke's law）がすべてを結びつける。そして不等式は、$\cos\theta$ のどの値が実際に円運動を表すのかを問うことから得られる。

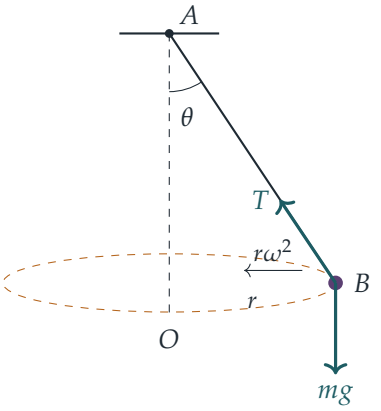
解答

$\cos\theta$ を求める

B を質点、AB をフックの法則に従う軽い弾性糸（elastic string）とみなす。伸びを x、張力を T とすると

$$T = \frac{\lambda x}{l}, \qquad AB = l + x.$$

質点は、A の鉛直真下にある点 O を中心とする半径 $r = (l + x)\sin\theta$ の水平な円周上を運動する。質点にはたらく力は重力と、BA に沿った張力だけである。



鉛直方向に力を分解すると（鉛直方向の加速度はない）

$$T\cos\theta = mg. \tag{1}$$

水平方向に、中心 O へ向かう向きに力を分解すると（加速度は $r\omega^2$）

$$T\sin\theta = m\omega^2(l+x)\sin\theta.$$

本当に円運動であれば $\sin\theta \neq 0$ なので、これで割ることができる。

$$T = m\omega^2(l+x). \tag{2}$$

ここでフックの法則より $\lambda x/l = m\omega^2(l+x)$、すなわち

$$x\left(\lambda - m\omega^2 l\right) = m\omega^2 l^2.$$

$x > 0$（(1) より $T > 0$ なので糸は伸びている）かつ $m\omega^2 l^2 > 0$ であるから、$\lambda - m\omega^2 l > 0$ であり

$$x = \frac{m\omega^2 l^2}{\lambda - m\omega^2 l}, \qquad l + x = \frac{l\lambda}{\lambda - m\omega^2 l}.$$

すると (2) より

$$T = \frac{m\omega^2 l\lambda}{\lambda - m\omega^2 l},$$

となり、(1) より

$$\boxed{\cos\theta = \frac{mg}{T} = \frac{g\left(\lambda - m\omega^2 l\right)}{l\lambda\,\omega^2}}$$

運動が可能となる条件

考えてみよう $\cos\theta$ に対するそれぞれの制約は、物理的に何を意味しているか。

糸がたるまずに、質点が A より下で水平な円運動をするためには、$0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$、すなわち $0 < \cos\theta < 1$ が必要である。逆に、ω が公式から $0 < \cos\theta < 1$ を与えるならば、($\lambda - m\omega^2 l > 0$ のもとで) 上の手順を逆にたどることで、(1) と (2) を満たす正の伸びと張力が得られるので、この運動は確かに存在する。

上界。 他の因数は正であるから、$\cos\theta > 0$ が成り立つのは $\lambda - m\omega^2 l > 0$ のときであり、かつそのときに限る。これは

$$\omega^2 < \frac{\lambda}{ml}.$$

である。物理的には、ω が大きすぎると、糸をどれだけ有限に伸ばしても必要な向心力を与えられない。長さが増えると必要な力も増えるが、その増え方が糸の与える力の増え方より速いからである。

下界。 $\cos\theta < 1$ は

$$g\lambda - gm\omega^2 l < l\lambda\omega^2 \iff g\lambda < \omega^2 l(\lambda + mg) \iff \omega^2 > \frac{g\lambda}{l(\lambda + mg)},$$

を意味する。ここで最初に $l\lambda\omega^2 > 0$ を掛け、最後に $l(\lambda + mg) > 0$ で割っているので、不等号の向きは変わらない。物理的には、ω が小さすぎると公式は $\cos\theta \geq 1$ を要求してしまう。その場合に可能なのは、質点が軸上に静止してぶら下がる ($\theta = 0$) ことだけであり、これは円運動ではない。

以上の二つを合わせると、運動が可能となるのは

$$\frac{g\lambda}{l(\lambda + mg)} < \omega^2 < \frac{\lambda}{ml},$$

のときに限られ、示すべきことが示された。

検算

- 下界では $\cos\theta = 1$ である。このとき糸は鉛直で、張力は mg、長さは $l(\lambda + mg)/\lambda$ であり、これはぶら下がった質点のつり合いの長さにちょうど一致する。$\omega^2 = g/(\text{その長さ})$ となっており、おなじみの円錐振り子の境界条件 $\omega^2 > g/L$ と一致することに注意せよ。
- $\lambda \to \infty$ (伸びない糸) とすると、結果は $\cos\theta = g/(l\omega^2)$ となって通常の円錐振り子に一致し、範囲は $\omega^2 > g/l$ となる。

- 数値的にも、$g = 9.8$ とし、m、l、λ、ω を無作為に選んで、フックの法則と水平方向の式を二分法（bisection）で直接解くと、公式と同じ $\cos\theta$ が得られ、分解した両方の式がつり合う。また 20 000 個の無作為な場合のすべてにおいて、運動が存在するのはちょうど不等式が成り立つときである。

よくある間違い

- 半径として $(l + x)\sin\theta$ ではなく $l\sin\theta$ を用いてしまう。糸は伸びているのである。
- $\sin\theta$ で割ることの正当化を忘れ、そのために $\theta = 0$（したがって $\cos\theta = 1$）が除外される理由を見落とす。
- $\cos\theta < 1$ だけを示し、$\cos\theta > 0$（同値な言い方をすれば、伸びが正であること）から上界が得られることを忘れる。

STEP のその先へ

上界は、**暴走**、すなわち不安定性（instability）の簡単な例である。$\omega^2 \to \lambda/(ml)$ のとき、必要な伸びは発散する。同じ現象は回転する弾性棒や回転体の安定性にも現れる。また下界は分岐（bifurcation）であり、そこでぶら下がったつり合いの状態が円運動に取って代わられる。回転座標系の力学についてさらに知りたければ、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照せよ。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。