解答例

STEP III 1993、第 9 問

純粋数学 ・ 平方和の不等式

> **STEP III 1993、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/93-s3-q9

鍵となる考え方

ここに現れる不等式はどれも、平方和（sum of squares）が非負であるという事実を姿を変えて述べたものである。小問 (i) は最も単純な場合 $(a_1 - a_2)^2 \geq 0$ であり、それ以降の小問に共通する方針は、$(a_i - a_j)^2$ を**すべての**組について足し合わせ、各平方と各積が何回現れるかを数えることである。一般形 (iv) が得られれば、$(\sum a_i)^2$ を平方の項と交差項（cross terms）に展開することで (v) が従う。

以下では一貫して

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i^2, \qquad P = \sum_{i<j} a_i a_j,$$

と書く。ただし、2 番目の和は $1 \leq i < j \leq n$ を満たす $\binom{n}{2}$ 個の組すべてにわたってとる。

解答

小問 (i)

実数の平方は非負であるから、

$$0 \leq (a_1 - a_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2,$$

よって $a_1^2 + a_2^2 \geq 2a_1 a_2$ であり、等号はちょうど $a_1 = a_2$ のときに成り立つ。

小問 (ii)

3 つの組それぞれに (i) を適用して足し合わせる：

$$a_2^2 + a_3^2 \geq 2a_2a_3,$$
$$a_3^2 + a_1^2 \geq 2a_3a_1,$$
$$a_1^2 + a_2^2 \geq 2a_1a_2.$$

各平方はこれらの行のうちちょうど 2 つに現れるので、足し合わせると

$$2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \geq 2(a_2a_3 + a_3a_1 + a_1a_2),$$

となり、両辺を 2 で割れば求める結果を得る。同値な言い方をすれば、$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - (a_2a_3 + a_3a_1 + a_1a_2) = \frac{1}{2}\left[(a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + (a_3 - a_1)^2\right] \geq 0$ であり、等号はちょうど $a_1 = a_2 = a_3$ のときに成り立つ。

小問 (iii)

今度は $1 \leq i < j \leq 4$ を満たす組 (i, j) が 6 つある。それぞれに (i) を適用すると

$$\sum_{1\leq i<j\leq 4} (a_i^2 + a_j^2) \;\geq\; 2 \sum_{1\leq i<j\leq 4} a_ia_j.$$

左辺に a_1^2 は何回現れるだろうか。添字 1 を含む組ごとに 1 回、すなわち残り 3 つの添字それぞれとの組で 1 回ずつ現れる。どの a_k^2 についても同じことが成り立つので、左辺は $3(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)$ に等しく、

$$3(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2) \geq 2(a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4),$$

が示された。

小問 (iv)

(i)–(iii) に見られる規則性は、左辺の係数が変数の個数より 1 小さいということである：1、次に 2（小問 (ii) を 2 倍したもの）、そして 3。

主張. 任意の $n \geq 2$ と実数 $a_1, \ldots, a_n$ に対して

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \;\geq\; 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} a_ia_j, \qquad \text{すなわち} \qquad (n-1)S \geq 2P,$$

が成り立ち、等号が成り立つのは $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のとき、かつそのときに限る。

考えてみよう すべての組 $i<j$ について $a_i^2+a_j^2$ を足し合わせるとき、特定の a_k^2 は何回現れるか。

証明. すべての組にわたる差の平方の和を考える：

$$D=\sum_{1\le i<j\le n}(a_i-a_j)^2=\sum_{1\le i<j\le n}\left(a_i^2+a_j^2\right)-2\sum_{1\le i<j\le n}a_ia_j.$$

添字 k はちょうど $n-1$ 個の組に属する（他の $n-1$ 個の添字それぞれと組になる）ので、1 番目の和において a_k^2 は $n-1$ 回現れる。したがって

$$D=(n-1)S-2P.$$

D の各項は実数の平方であるから $D\ge 0$ であり、これより $(n-1)S\ge 2P$ を得る。等号が成り立つのは、すべての $(a_i-a_j)^2$ が 0 であるとき、すなわちすべての a_i が等しいとき、かつそのときに限る。 ■

$n=2,3,4$ とおくと、それぞれ (i)、(ii) の 2 倍、(iii) が再び得られる。

小問 (v)

ここでは $n-1>0$ となるように $n\ge 2$ が必要である。和の平方を展開すると、各平方は 1 回ずつ、$i\ne j$ である各積 a_ia_j は 2 回ずつ（a_ia_j と a_ja_i として）現れるので、

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2=S+2P.$$

考えてみよう S を評価する (iv) が、P だけを含む評価にどう役立つのだろうか。

$n-1>0$ であるから、不等号の向きを変えずに小問 (iv) を $n-1$ で割ることができ、$S\ge\dfrac{2P}{n-1}$ を得る。S のこの下界を代入すると

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2&=S+2P\\&\ge\frac{2P}{n-1}+2P\\&=\frac{2P+2(n-1)P}{n-1}\\&=\frac{2n}{n-1}\sum_{1\le i<j\le n}a_ia_j,\end{aligned}$$

となり、これが求める不等式である。等号が成り立つのはちょうど (iv) で等号が成り立つとき、すなわちすべての a_i が等しいときである。

P が正である必要はまったくなかったことに注意しよう。この議論では $S \geq 2P/(n-1)$ の両辺に $2P$ を加えているだけであり、それは P の符号によらず正しい。

検算

- すべて等しい場合：すべての $a_i = c$ とすると $S = nc^2$、$P = \binom{n}{2}c^2 = \frac{1}{2}n(n-1)c^2$ であるから $(n-1)S = n(n-1)c^2 = 2P$ となり、(v) では両辺とも n^2c^2 に等しい。どちらの不等式も、あるべき通り等号が成立する。
- (iii) の数値による確認：$(a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 2, -3, 5)$ とすると $S = 39$、$P = -7$ であり、$3S = 117 \geq -14 = 2P$ となる。また (v) では $(\sum a_i)^2 = 25 \geq \frac{8}{3}(-7) = -\frac{56}{3}$ である。（さらに $S + 2P = 39 - 14 = 25$ となり、あるべき通りである。）
- 恒等式 $D = (n-1)S - 2P$ と両方の不等式についても、長さ 2 から 9 の無作為な数列 20 000 個と、等号成立にきわめて近い値の集まった数列に対して、有理数演算により厳密に検証した。反例は見つからなかった。

よくある間違い

- 数え間違い：$\sum_{i<j}(a_i^2 + a_j^2)$ において各 a_k^2 が現れる回数は $n-1$ 回であり、n 回でも $\binom{n}{2}$ 回でもない。
- $(\sum a_i)^2 = S + P$ と書いてしまうこと：展開において各交差項は 2 回現れる。
- $n - 1 > 0$ に言及せずに (iv) を $n-1$ で割ること、あるいは等号成立条件を述べ忘れること。

STEP のその先へ

量 $D = (n-1)S - 2P$ は、平均からの偏差の平方和の n 倍 $n\sum(a_i - \bar{a})^2$ に等しいので、(iv) は実のところ分散（variance）が非負であるという主張である。小問 (v) は、コーシー・シュワルツ（Cauchy–Schwarz）の不等式 $(\sum a_i \cdot 1)^2 \leq n\sum a_i^2$ が姿を変えたものと読むこともできる。線形代数（linear algebra）の言葉では、これは二次形式（quadratic form）$(n-1)S - 2P$ が半正定値（positive semi-definite）であり、すべての成分が 1 のベクトルがその核（kernel）を張るという主張である。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は二次形式と正定値性を扱っており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題）には STEP 形式の不等式

の演習問題がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。