解答例

STEP III 1993、第 8 問

純粋数学 • 空間内の平面と直線

STEP III 1993、問 8

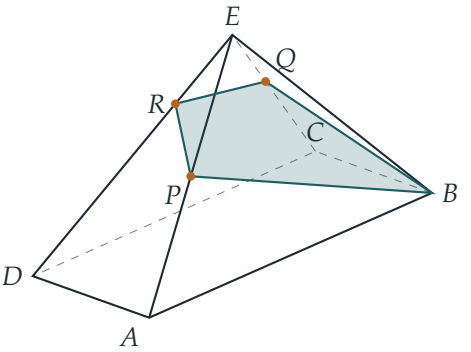
先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/93-s3-q8

鍵となる考え方

各側辺は底面の頂点と E を結んでいるので、側辺上のすべての点は簡単なパラメータ表示（parametric form）をもつ。したがって P、Q、R はすぐに書き下すことができ、B、P、Q を通る平面は、これらの点を代入して係数を定める一次方程式（linear equation）として求められる。後半については、平行四辺形（parallelogram）であるかどうかを判定する最もすっきりした方法は、対角線（diagonal）が互いに他を二等分する（bisect each other）かどうかを調べることである。これが成り立たないことを示すには、座標を一つ見れば十分である。

解答



γ を求める

辺 AE 上では $x+z=a$ が成り立つので、辺 AE は $0 \le t \le 1$ に対する点 $(ta, 0, (1-t)a)$ の全体である。同様に、CE は $\{(-ta, 0, (1-t)a)\}$、DE は $\{(0, -ta, (1-t)a)\}$ である。よって

$$P = (\lambda a,\ 0,\ (1-\lambda)a), \qquad Q = (-\mu a,\ 0,\ (1-\mu)a), \qquad R = (0,\ -\gamma a,\ (1-\gamma)a).$$

平面 BPQ を

$$px + qy + rz = a.$$

の形で求める。3 点 B、P、Q は同一直線上にない（not collinear）ので、ただ一つの平面を定める。三つの条件をすべて満たす p, q, r が見つかれば、その方程式が求める平面である。各点を代入すると

$$\begin{aligned} B:&\quad qa = a, && \text{よって} q = 1,\\ P:&\quad p\lambda + r(1-\lambda) = 1,\\ Q:&\quad -p\mu + r(1-\mu) = 1. \end{aligned}$$

p を消去するために、P の式を μ 倍し、Q の式を λ 倍して加えると

$$r(\mu - \lambda\mu + \lambda - \lambda\mu) = \lambda + \mu, \qquad \text{よって} \qquad r = \frac{\lambda+\mu}{\lambda+\mu-2\lambda\mu}.$$

分母は $\lambda(1-\mu) + \mu(1-\lambda) > 0$ なので、これで問題ない。（以下では使わないが、$p = (\lambda-\mu)/(\lambda+\mu-2\lambda\mu)$ である。）

さて、R はこの平面上にあるので

$$-\gamma + r(1-\gamma) = 1 \quad\Longrightarrow\quad \gamma(1+r) = r-1 \quad\Longrightarrow\quad \gamma = \frac{r-1}{r+1}.$$

すべてを共通の分母 $\lambda+\mu-2\lambda\mu$ で表すと

$$r-1 = \frac{2\lambda\mu}{\lambda+\mu-2\lambda\mu}, \qquad r+1 = \frac{2(\lambda+\mu-\lambda\mu)}{\lambda+\mu-2\lambda\mu},$$

したがって

$$\gamma = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu-\lambda\mu},$$

となり、示すべき式が得られた。

$0 < \gamma < 1$ であること、つまり R が確かに辺 DE 上の D と E の間（両端を除く）にあることにも注意しておくとよい。正であることは明らかである。$\gamma < 1$ については、分母が分子より $\lambda+\mu-2\lambda\mu = \lambda(1-\mu) + \mu(1-\lambda) > 0$ だけ大きいことからわかる。

$BPRQ$ は平行四辺形ではない

考えてみよう 与えられた順に並べた 4 点が平行四辺形をなすかどうかを判定する、最も手早い方法は何か。

四角形 $BPRQ$ が平行四辺形であるのは、対角線 BR と PQ が互いに他を二等分するとき、すなわち

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}.$$

が成り立つときであり、かつそのときに限る。（これは $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{QR}$、つまり一組の対辺が平行で長さが等しいことと同じである。）両辺の y 座標を比較すると

$$\text{左辺}：a-\gamma a=(1-\gamma)a,\qquad \text{右辺}：0+0=0.$$

これらが等しくなければならないので、$\gamma=1$ となる。しかし $\gamma<1$ はすでに示した。実際、$\gamma=1$ なら R は E に一致してしまう。よって対角線が互いに他を二等分することはなく、$BPRQ$ は平行四辺形になりえない。 ■

念のため補足しておく。平面は 4 本の側辺を EB, EA, ED, EC の巡回順に切るので、四角形の頂点は確かに B, P, R, Q の順に並ぶ。点の組み合わせ方を変えても状況は変わらない。$B+P=Q+R$ と $B+Q=P+R$ はいずれも y 座標で $a=-\gamma a$ を必要とするが、$\gamma>0$ なのでこれは不可能である。

同じことを幾何的に見る方法もある。BP は面 ABE 上にあり、QR は面 CDE 上にある。これら二つの面は、E を通り AB に平行な直線で交わる。この二つの平面上にそれぞれある 2 直線が平行ならば、それらはこの共通の直線に平行でなければならない。よって $BP \parallel QR$ ならば $BP \parallel AB$ となるが、$P \neq A$ なのでこれは不可能である。

検算

- 対称な場合 $\lambda=\mu$：公式から $\gamma=\lambda/(2-\lambda)$ となる。$\lambda=\mu=\frac{1}{2}$ のとき、これは $\frac{1}{3}$ である。直接計算すると、$p=0$、$r=2$ で平面は $y+2z=a$ となり、DE と $(0,-\frac{1}{3}a,\frac{2}{3}a)$ で交わる。予想どおりである。
- 極限 $\lambda,\mu\to 1$：$P\to A$、$Q\to C$ となって平面は底面に近づき、$\gamma\to 1$ より $R\to D$ となる。当然そうなるべきである。
- 結果は $\dfrac{1-\gamma}{\gamma}=\dfrac{1-\lambda}{\lambda}+\dfrac{1-\mu}{\mu}$ ときれいに書き直せ、数値で確かめやすい。たとえば $\lambda=\frac{1}{2}$、$\mu=\frac{2}{5}$ のとき $\gamma=\frac{2}{7}\approx 0.2857$ となる。
- a,λ,μ を無作為に 2000 通り選び、公式、$0<\gamma<1$、および平行四辺形に関する主張を（分数を用いて）厳密に確認した。R は、外積（cross product）で求めた平面の法線ベクトル（normal）を使って独立に求めた。

よくある間違い

- AE のパラメータ表示の誤り：AE 上では座標が $x+z=a$ かつ $y=0$ を満たすので、P の z 座標は λa ではなく $(1-\lambda)a$ である。
- 2 次元の図の上で傾きを使って $BP \parallel QR$ かどうかだけを調べること。四角形は傾いた平面上にあるので、3 次元のベクトルで扱うこと。
- $\gamma < 1$ を示し忘れること。これこそ平行四辺形の議論に必要なことである。

STEP のその先へ

平面と直線の交点を求めることは、連立一次方程式（linear system）を解くことの最も簡単な例である。$EP:PA=(1-\lambda):\lambda$ であり、他の辺についても同様なので、この結果は

$$\frac{ER}{RD}=\frac{EP}{PA}+\frac{EQ}{QC},$$

と言い換えられる。これは B を通る任意の平面についての、座標によらない主張である。直線上の比だけを用いているので、底面が平行四辺形である任意の角錐（pyramid）についても成り立つ。アフィン写像（affine map）によって、そのような角錐はどれもこの角錐に移されるからである。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）では、平面、法線、連立一次方程式が本格的に展開されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。