解答例

# STEP III 1993、第 7 問

純粋数学 • 双曲線関数の連立方程式

> **STEP III 1993、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/93-s3-q7

## 鍵となる考え方

二つの式に現れる倍角の sinh をどちらも展開する。すると第 2 式から $\cosh x$ が $y$ で直接表され、第 1 式をそれで割ると $\sinh x$ も $y$ で表される。恒等式（identity）$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ を用いれば $x$ は完全に消去され、$\sinh^2 y$ だけの方程式が残る。あとは三次方程式（cubic）の適切な解を見つけ、それを数値的に確定させればよい。

## 解答

### $x$ の消去

$\sinh 2u = 2\sinh u \cosh u$ を用いると、二つの方程式は

$$2\sinh x \cosh x = \cosh y, \qquad 2\sinh y \cosh y = 2\cosh x.$$

となる。第 2 式から

$$\cosh x = \sinh y \cosh y.$$

を得る。$\cosh x \geq 1 > 0$ であるから、第 1 式を $2\cosh x$ で割ってよく、

$$\sinh x = \frac{\cosh y}{2\sinh y \cosh y} = \frac{1}{2\sinh y},$$

となる。ここで $\cosh y > 0$ であるから $\cosh y$ で割ることは問題なく、また $\sinh y \cosh y = \cosh x \neq 0$ であるから $\sinh y \neq 0$ である。

次に、これら二つを $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ に代入する。$t = \sinh^2 y$ とおくと $\cosh^2 y = 1 + t$ であるから、

$$t(1+t) - \frac{1}{4t} = 1.$$

両辺に $4t$（これは 0 でない）を掛けると $4t^2 + 4t^3 - 1 = 4t$、すなわち

$$4t^3 + 4t^2 - 4t - 1 = 0,$$

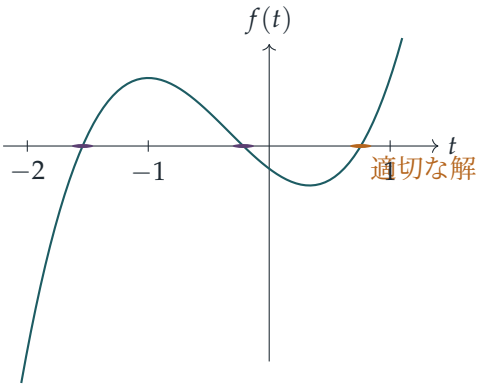
を得る。よって $t = \sinh^2 y$ は与えられた三次方程式の解であり、示すべきことが示された。

### 適切な解は高々一つ

$f(t) = 4t^3 + 4t^2 - 4t - 1$ とおく。$t = \sinh^2 y$ かつ $\sinh y \neq 0$ であるから、適切な解は $t > 0$ を満たさなければならない。さて

$$f(-2) = -9, \quad f(-1) = 3, \quad f(0) = -1, \quad f(1) = 3,$$

であるから、中間値の定理（intermediate value theorem）により、この三次方程式は $(-2, -1)$、$(-1, 0)$、$(0, 1)$ のそれぞれに解をもつ。三次方程式の解は高々三つであるから、これらがすべての解であり、正の解はちょうど一つである。




**考えてみよう** 正の $t$ からは $\sinh y = \pm\sqrt{t}$ の二つの値が得られる。なぜ一方しか残らないのか？

$\cosh x = \sinh y \cosh y$ であり、$\cosh x > 0$、$\cosh y > 0$ であるから、$\sinh y > 0$ でなければならない。よって $\sinh y = +\sqrt{t}$ であり、sinh は狭義単調増加（strictly increasing）であるから、これを満たす $y$ はちょうど一つで、$y > 0$ である。したがって三次方程式から得られる適切な $y$ は高々一つである（そして sinh は単射（one-to-one）であるから、$\sinh x = 1/(2\sinh y)$ により $x$ も一意に定まる）。

### $t$ の位置の特定と計算

$$f(0.7) = 1.372 + 1.96 - 2.8 - 1 = -0.468 < 0,$$
$$f(0.8) = 2.048 + 2.56 - 3.2 - 1 = 0.408 > 0,$$

であるから、中間値の定理により正の解は 0.7 と 0.8 の間にある。

ニュートン・ラフソン法（Newton–Raphson method）の反復

$$t_{n+1} = t_n - \frac{f(t_n)}{f'(t_n)}, \qquad f'(t) = 12t^2 + 8t - 4,$$

を、中点 $t_0 = 0.75$ から始めて用いる。$f(0.75) = -0.0625$、$f'(0.75) = 8.75$ であるから、

$$t_1 = 0.75 + \frac{0.0625}{8.75} = 0.7571429,$$
$$t_2 = 0.7570685,$$
$$t_3 = 0.75706846,$$

となり、$t_4$ は表示したすべての桁で $t_3$ と一致する。小数第 6 位までを確定させるために、符号の変化

$$f(0.7570680) < 0 < f(0.7570690),$$

を確かめる。よって解はこの区間にあり、

$$t = 0.757068 \text{ （小数第 6 位まで）.}$$

である（より遅いがまったく問題のない別の方法として、$t^2(4t+4) = 4t+1$、すなわち $t = \sqrt{(4t+1)/(4t+4)}$ と変形する方法がある。解の近くで右辺の導関数はおよそ 0.16 であるから、この反復は収束し、1 ステップごとに小数 1 桁弱ずつ精度が上がる）。

### $y$ と $x$ を求める

正の平方根をとると $\sinh y = \sqrt{0.7570685} = 0.870097$ であるから、

$$y = \operatorname{arsinh}(0.870097) = \ln(0.870097 + \sqrt{1.757068}) = 0.786474,$$

であり、

$$\sinh x = \frac{1}{2\sinh y} = 0.574649, \qquad x = \ln(0.574649 + \sqrt{1.330221}) = 0.546965.$$

である。

もとの方程式で確かめると、

$$\sinh 2x = 1.325545 = \cosh y,$$
$$\sinh 2y = 2.306704 = 2\cosh x,$$

となり、両方の式が成り立つ。小数第 4 位までで、

$$x = 0.5470, \qquad y = 0.7865.$$

## 検算

- 三次方程式の残り二つの解はおよそ $-0.2140$ と $-1.5431$ であり、議論のとおりどちらも負である。三つの解の積は $\frac{1}{4}$ であり、$0.757068 \times 0.2140 \times 1.5431 \approx 0.250$ と一致する。
- $y \in [-5, 5]$ の範囲を直接数値的に調べ、第 2 式から $x = \pm \operatorname{arcosh}(\frac{1}{2}\sinh 2y)$ をとって第 1 式を確かめると、解は $y \approx 0.7865$、$x > 0$ のただ一つだけ見つかる。
- 負の選択 $\sinh y = -\sqrt{t}$ をすると $\sinh y \cosh y < 0$ となり、これは決して $\cosh x$ と等しくなりえない。これは、この選択が確かに不適であることの手早い確認になる。

## よくある間違い

- 早い段階で 2 乗し（たとえばもとの二つの方程式をどちらも 2 乗し）、その後で不適な符号を除くのを忘れる。
- 二つの反復値が小数第 6 位まで一致した時点で反復をやめてしまい、丸めの区間をまたぐ符号の変化を確かめない。
- 平方根や対数をとる前に $t$ を小数第 6 位で丸めてしまう。余分な桁を保持して計算し、最終的な $x$ と $y$ だけを丸めること。

## STEP のその先へ

ここで用いた二つの反復は、収束の速さが大きく異なる。不動点反復（fixed-point iteration）$t \mapsto g(t)$ は一次収束（linear convergence）し、誤差は 1 ステップごとにおよそ $|g'(\text{解})|$ 倍に縮む。一方、ニュートン・ラフソン法は二次収束（quadratic convergence）し、1 ステップごとに正しい桁数がおよそ 2 倍になる。これを厳密にするには平均値の定理（mean value theorem）とテイラーの定理（Taylor's theorem）を用いる。これが数値解析（numerical analysis）の出発点である。その背後にある解析学については、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学の入門書）を参照のこと。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。