解答例

STEP III 1993、第 6 問

純粋数学 • 複素数平面上の軌跡

> **STEP III 1993、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/93-s3-q6

鍵となる考え方

円（circle）を表すには $|z-k|=r$ が自然な記述であり、$|u|^2=uu^*$ を用いてこれを 2 乗すると、平方根を含まない z と z^* の方程式になる。軌跡（locus）をいったんこの形で書けば、$w=z/(z-1)$ のようなメビウス（Möbius）変換は扱いやすい。逆に解いて z を w で表し、代入し、分母を払い、一般形と比較して新しい中心と半径を読み取ればよい。

解答

円の方程式

P が円上にあるのは、K からの距離が r であるとき、すなわち $|z-k|=r$ であるとき、かつそのときに限る。両辺を 2 乗し、$|u|^2=uu^*$ と $(z-k)^*=z^*-k^*$ を用いると

$$r^2=(z-k)(z^*-k^*)=zz^*-kz^*-k^*z+kk^*,$$

となるので、求める式 $zz^*-kz^*-k^*z+kk^*-r^2=0$ が得られる。

逆に、$s>0$ として方程式 $ww^*-cw^*-c^*w+cc^*-s^2=0$ は $|w-c|^2=s^2$ を意味するから、これは中心 c、半径 s の円である。以下ではこれを用いて円を見分ける。

P の軌跡

OA を直径とする円は、中心が i（0 と $2i$ の中点）、半径が 1 である。$k=i$、$k^*=-i$、$kk^*=1$、$r=1$ とすると、最初の結果から

$$zz^*+iz-iz^*=0. \qquad (*)$$

を得る。

Q_1 の軌跡 L

$z=1$ はこの円上にない（i からの距離が $\sqrt{2}$ である）ので、$w_1 = z/(z-1)$ はすべての P に対して定義される。w_1 を w と書く。$w(z-1)=z$ を z について解くと

$$z = \frac{w}{w-1}, \qquad z^* = \frac{w^*}{w^*-1},$$

となり、また $w \neq 1$ である。$w=1$ となるには $z=z-1$ が必要だからである。これを $(*)$ に代入すると

$$\frac{ww^*}{(w-1)(w^*-1)} + \frac{iw}{w-1} - \frac{iw^*}{w^*-1} = 0.$$

o でない $(w-1)(w^*-1)$ を両辺に掛けると

$$\begin{aligned} 0 &= ww^* + iw(w^*-1) - iw^*(w-1) \\ &= ww^* + iww^* - iw - iww^* + iw^* \\ &= ww^* - iw + iw^*. \end{aligned}$$

したがって L の方程式は

$$w_1 w_1^* - iw_1 + iw_1^* = 0.$$

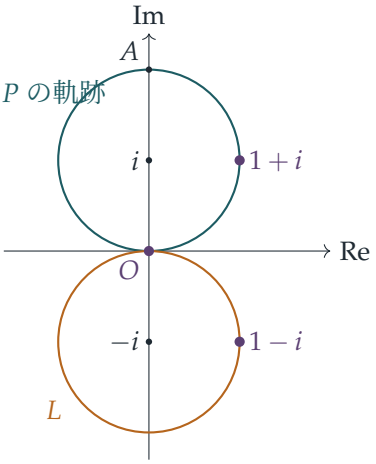
である。これが何であるかを調べるために一般形と比較する。$-k^* = -i$ かつ $-k = i$ が必要なので $k=-i$ であり、このとき $kk^* = 1$、定数項 $kk^* - r^2$ は 0 なので $r=1$ である。よって L は中心 $-i$、半径 1 の円、すなわち $|w_1 + i| = 1$ である。これは P の円を実軸に関して折り返したものであり、やはり原点を通る。

> **考えてみよう** この円のすべての点が実際に到達されるのか、それとも一部だけなのか。

上の各段階はすべて逆にたどることができる。$w \neq 1$ が $|w+i|=1$ 上にあれば、$z = w/(w-1)$ は $(*)$ を満たすので、これは $w_1 = w$ となる円上の点 P である。取りこぼされる可能性があるのは $w=1$ だけだが、$|1+i| = \sqrt{2}$ なのでこれは L 上にない。よって軌跡は円全体である。

Q_2 の軌跡

$|z-i|=1$ の共役（conjugate）をとると、$|u^*| = |u|$ かつ $(z-i)^* = z^* + i$ であるから $|z^*+i|=1$ を得る。よって $w_2 = z^*$ は $|w_2+i|=1$ を満たす。z が i を中心とする円全体を動くとき、z^* は $-i$ を中心とする円全体を動く。同じことであるが、$(*)$ の共役をとると $z^*z - iz^* + iz = 0$ となり、これは $w = z^*$ とした L の方程式である。したがって Q_2 の軌跡もまた L である。



Q_1 と Q_2 が一致するとき

$\dfrac{z}{z-1} = z^*$、すなわち

$$z = zz^* - z^*.$$

が必要である。円上では $(*)$ より $zz^* = iz^* - iz$ である。これを代入すると

$$z = iz^* - iz - z^* \quad \Longrightarrow \quad (1+i)z = (i-1)z^*.$$

解の一つは $z = 0$ である。それ以外のときは $z^* \neq 0$ であり

$$\frac{z}{z^*} = \frac{i-1}{1+i} = \frac{(i-1)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2i}{2} = i.$$

となる。$\rho > 0$ として $z = \rho \mathrm{e}^{i\theta}$ と書くと、これは $\mathrm{e}^{2i\theta} = i$ を意味するので、$\theta = \frac{\pi}{4}$ または $\frac{5\pi}{4}$ であり、P は直線 $y = x$ 上にある。この直線が円 $x^2 + (y-1)^2 = 1$、すなわち $x^2 + y^2 = 2y$ と交わるのは $2x^2 = 2x$ となるところ、つまり $x = 0$ または $x = 1$ のときである。o でない点は $z = 1 + i$ である。

両方を確かめる。$z = 0$ のとき $w_1 = 0 = z^*$ であり、$z = 1 + i$ のとき

$$w_1 = \frac{1+i}{i} = 1 - i = z^*.$$

である。したがって Q_1 と Q_2 が一致するのは、P が原点または点 $1 + i$ であるとき、かつそのときに限る。これらは $y = x$ と円の 2 つの交点であり、$Q_1 = Q_2$ の共通の位置は 0 と $1 - i$ である。

検算

- 具体的な点で確かめる。$P = 2i$（点 A）とすると $w_1 = \frac{2i}{2i-1} = \frac{4-2i}{5}$ であり、$|w_1 + i| = \left|\frac{4+3i}{5}\right| = 1$ なので、この点は L 上にある。

- 数値的には、$|z-i|=1$ 上のランダムな点を 10^4 個とり、$z/(z-1)$ と z^* がともに誤差 10^{-9} 以内で $|w+i|=1$ を満たすことを確かめた。また円周上の 2×10^5 個の点について $\left|z/(z-1)-z^*\right|<10^{-3}$ となるものを探したところ、見つかったのは $z=0$ と $z=1+i$ だけであった。

よくある間違い

- $z=0$ の場合を先に別扱いせずに z^* で割ってしまい、解 $P=O$ を失う。
- $z/z^*=i$ を導いたところで止めてしまう。これは P の方向を決めるだけであり、さらにその直線と円との交点を求める必要がある。
- $ww^*-iw+iw^*=0$ を一般形と照合するときに k の符号を誤る。w^* の係数は $-k$ なので、$k=-i$ であり、i ではない。

STEP のその先へ

写像 $z\mapsto z/(z-1)$ はメビウス変換（Möbius transformation）であり、このような写像は常に円と直線を円と直線に写す。ここでは像の円がたまたま元の円の鏡像になっており、そのため共役をとっても同じ軌跡が得られるのである。共役をとる操作それ自体は向き（orientation）を反転させるのでメビウス変換ではないが、これをメビウス変換と合成すると「反メビウス変換」が得られ、その中には円に関する鏡映が含まれる。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析入門）は、メビウス変換、反転（inversion）、および円を保つ性質について美しい幾何学的な解説を与えている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。