解答例

STEP III 1993、第 4 問

純粋数学 • 級数の和

> **STEP III 1993、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/93-s3-q4

鍵となる考え方

どの級数（series）も、見慣れた級数が姿を変えたものである。級数の和を求める通常の方法は、それを標準的な展開（対数（logarithm）、等比級数（geometric series）、あるいはその導関数（derivative））の特定の点での値とみなすか、一般項を分解して和が打ち消し合う形（telescoping）にすることである。そこで各小問について、それがどの標準的な級数でありうるか、そしてその形にするには何を掛け、何を微分し、どう並べ替えればよいかを考える。

解答

小問 (i)

分母が奇数 $1,3,5,\ldots$ であることから、奇数乗の項だけを残した対数の級数が思い浮かぶ。$|x|<1$ のとき

$$\ln(1+x)=x-\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{x^3}{3}-\cdots, \qquad \ln(1-x)=-x-\tfrac{x^2}{2}-\tfrac{x^3}{3}-\cdots,$$

であり、差をとると偶数乗の項が消える：

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

求める級数は $\sum x^{2n}/(2n+1)$ で $x=\frac{1}{2}$ としたものである。冪が偶数なので、x で割る（$x\neq 0$ なので許される）：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}=\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

$x = \frac{1}{2}$ は収束区間（interval of convergence）の内部にあり、$\frac{1+x}{1-x} = \frac{3/2}{1/2} = 3$、$\frac{1}{2x} = 1$ であるから

$$1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots = \ln 3.$$

小問 (ii)

係数は周期 4 で繰り返し、$x^{4k}, x^{4k+1}, x^{4k+2}, x^{4k+3}$ に対してそれぞれ $2, -1, 0, -1$ である。そこで 4 項ずつまとめると

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{4k}\left(2 - x - x^3\right) = \frac{2 - x - x^3}{1 - x^4},$$

となる。これは公比 x^4 の等比級数であり、$|x^4| < 1$ なので収束する。このようにまとめてよいのは、もとの級数が $|x| < 1$ で絶対収束（absolute convergence）するからである。実際、各項の大きさは $2|x|^m$ で押さえられる。

次に式を簡単にする。分子は $x = 1$ で 0 になるので、$1 - x$ を因数にもつ：

$$2 - x - x^3 = (1 - x)(x^2 + x + 2), \qquad 1 - x^4 = (1 - x)(1 + x)(1 + x^2).$$

$1 - x$（$|x| < 1$ なので 0 でない）を約分して、部分分数（partial fractions）に分解する：

$$\frac{x^2 + x + 2}{(1 + x)(1 + x^2)} = \frac{A}{1 + x} + \frac{Bx + C}{1 + x^2}.$$

$x = -1$ とおくと $2 = 2A$ より $A = 1$。すると $x^2 + x + 2 - (1 + x^2) = x + 1 = (Bx + C)(1 + x)$ より $B = 0$、$C = 1$ である。したがって

$$2 - x - x^3 + 2x^4 - \cdots = \frac{1}{1 + x} + \frac{1}{1 + x^2}.$$

これは容易に確かめられる。$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots$ と $1 - x^2 + x^4 - \cdots$ を足すと、係数は $2, -1, 0, -1, 2, \ldots$ となり、求めるとおりである。

小問 (iii)

一般項を次のように書く：

$$\frac{r\,2^{r-2}}{3^{r-1}} = \frac{1}{2}\, r \left(\frac{2}{3}\right)^{r-1}.$$

考えてみよう $\sum r y^{r-1}$ は以前どこで見たか？

これは等比級数の導関数である。$|y| < 1$ のとき、$\sum_{r=0}^{\infty} y^r = \frac{1}{1-y}$ を項別に微分する（収束区間の内部では正当である）と

$$\sum_{r=1}^{\infty} r y^{r-1} = \frac{1}{(1 - y)^2}.$$

$y=\frac{2}{3}$ とするとこれは $\frac{1}{(1/3)^2}=9$ である。求める和は $r=2$ から始まるので、$r=1$ の項 1 を取り除く：

$$\sum_{r=2}^{\infty}\frac{r\,2^{r-2}}{3^{r-1}}=\frac{1}{2}\,(9-1)=4.$$

小問 (iv)

$r(r^2-1)=(r-1)r(r+1)$ は連続する 3 整数の積なので、隣り合う 2 つの「対」の分数の差を考える：

$$\frac{1}{(r-1)r}-\frac{1}{r(r+1)}=\frac{(r+1)-(r-1)}{(r-1)r(r+1)}=\frac{2}{r(r^2-1)}.$$

よって和は打ち消し合う形になる。$r=2$ から N まで足すと、最初と最後以外の項はすべて消える：

$$\sum_{r=2}^{N}\frac{2}{r(r^2-1)}=\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{N(N+1)}.$$

$N\to\infty$ とすると最後の項は 0 に収束するので

$$\sum_{r=2}^{\infty}\frac{2}{r(r^2-1)}=\frac{1}{2}.$$

検算

- (i)：最初の 4 項で $1+0.0833+0.0125+0.0022\approx 1.098$ となり、すでに $\ln 3\approx 1.0986$ に近い。
- (ii)：$x=0$ では両辺とも 2 である。$x=\frac{1}{2}$ では閉じた式は $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{22}{15}$ を与え、数値的に部分和と一致する。
- (iii)：最初の項は $\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{16}{27},\ldots$ であり、部分和はゆっくりと 4 に近づいていく。
- (iv)：$N=4$ までの部分和は $\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}=\frac{9}{20}=\frac{1}{2}-\frac{1}{20}$ であり、公式と一致する。

よくある間違い

- (i) で x で割るのを忘れること。$\sum x^{2n+1}/(2n+1)$ の $x=\frac{1}{2}$ での値は $\frac{1}{2}\ln 3$ であり、$\ln 3$ ではない。
- (iii) で $r=1$ から足して、欠けている最初の項を引くのを忘れること。そうすると $\frac{9}{2}$ になってしまう。
- (iv) で代わりに $\frac{1}{r-1}-\frac{1}{r+1}$ を用いて打ち消し合いを作ろうとすること。これは $\frac{2}{r^2-1}$ の分解であって、$\frac{2}{r(r^2-1)}$ の分解ではない。

STEP のその先へ

ここで特に断らずに行った操作（(ii) での項のまとめ直しと、(iii) での冪級数の項別微分）は、まさに解析学の最初の講義で正当化されるものである。冪級数（power series）は収束半径（radius of convergence）の内部で絶対収束し、項別に微分できる。一方、条件収束（conditional convergence）するだけの級数は、項を並べ替えると和が変わりうる（リーマン（Riemann）の再配列定理）。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、この両方を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。