解答例

# STEP III 1993、第 3 問

純粋数学 • 行列の LU 分解

**STEP III 1993、問 3**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/93-s3-q3

## 鍵となる考え方

$\mathbf{M}$ を下三角行列（lower-triangular matrix）と上三角行列（upper-triangular matrix）の積として表すこと（*LU* **分解**（LU decomposition））により、すべてが未知数 1 個の方程式の連鎖に帰着する。$\mathbf{AB}$ を展開し、成分を適切な順序で比較していく。すると、新しく現れる方程式はどれも未知数を 1 つしか含まないので、値とその一意性（uniqueness）が同時に得られる。また、三角行列は逆行列（inverse）を求めるのが容易であり、$\mathbf{Mx} = \mathbf{v}$ は解きやすい 2 つの三角行列の連立方程式に分かれる。

**はじめに注意**。問題文には $e = 1$ と印刷されているが、これは誤植であり、正しい値は $e = -1$ である。$e = 1$ とすると、$\mathbf{AB}$ の最下行は (3, 8, 7) ではなく (3, 10, 1) となってしまう。以下ではすべて $e = -1$ を用いる。

## 解答

### A と B を求める

展開すると、

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} a & ap & aq \\ b & bp + c & bq + cr \\ d & dp + e & dq + er + f \end{pmatrix}.$$

これを $\mathbf{M}$ と等しいとおき、各方程式に未知数が 1 つだけ残るように、次の順序で成分を比較する。

► $(1,1)$ 成分：$a = 1$。

- (1,2) 成分と (1,3) 成分：$ap = 3$ かつ $aq = 2$ であるから、$p = 3$、$q = 2$（$a = 1$ による）。
- (2,1) 成分と (3,1) 成分：$b = 4$、$d = 3$。
- (2,2) 成分：$bp + c = 13$ であるから、$c = 13 - 12 = 1$。
- (2,3) 成分：$bq + cr = 5$ であるから、$8 + r = 5$ より $r = -3$（$c = 1$ を用いた）。
- (3,2) 成分：$dp + e = 8$ であるから、$9 + e = 8$ より $e = -1$。
- (3,3) 成分：$dq + er + f = 7$ であるから、$6 + 3 + f = 7$ より $f = -2$。

どの未知数も、他のすべてがすでに分かっている方程式によって**一つに定まった**。また、割り算は $a = 1$ と $c = 1$ によるものだけであり、これらは 0 でない。よって、$\mathbf{M} = \mathbf{AB}$ ならば未知数はこれらの値をとらなければならない。逆に、これらの値は 9 個の方程式をすべて満たす。したがって解は存在し、しかも一意である：

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ただし $a = 1$、$b = 4$、$c = 1$、$d = 3$、$e = -1$、$f = -2$、$p = 3$、$q = 2$、$r = -3$ である。

**考えてみよう** 一意性はどこから来るのか。見つけた解は 1 つだけである。

一意性は推論の**順序**から生じる。どの段階でも選択の余地はなかった。各方程式は 1 つの新しい未知数についての 1 次方程式で、その係数は 0 でなかったから、解はちょうど 1 つであった。したがって、与えられた形の $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ で $\mathbf{AB} = \mathbf{M}$ を満たすものは、上の組に限られる。（$\mathbf{B}$ の対角成分が 1 であることは重要である。これがなければ、$\mathbf{A}$ を定数倍で大きくし、$\mathbf{B}$ を同じだけ小さくすることができてしまう。）

### 逆行列

$\mathbf{A}$ の逆行列を求めるには、$\mathbf{Au} = \mathbf{v}$ を上から順に解く：

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1, \\ u_2 &= v_2 - 4u_1 = -4v_1 + v_2, \\ -2u_3 &= v_3 - 3u_1 + u_2 = -7v_1 + v_2 + v_3 \implies u_3 = \tfrac{1}{2}(7v_1 - v_2 - v_3). \end{aligned}$$

$\mathbf{B}$ の逆行列を求めるには、$\mathbf{Bw} = \mathbf{u}$ を下から順に解く：

$$\begin{aligned} w_3 &= u_3, \\ w_2 &= u_2 + 3w_3 = u_2 + 3u_3, \\ w_1 &= u_1 - 3w_2 - 2w_3 = u_1 - 3u_2 - 11u_3. \end{aligned}$$

係数を読み取ると、

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -11 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

実際に掛け算をすると、$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$ かつ $\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{I}$ であることが確かめられる。下三角（上三角）行列の逆行列はやはり下三角（上三角）行列であることに注意しよう。

### 連立方程式

与えられた連立方程式（simultaneous equations）は、$\mathbf{x} = (x, y, z)^{\mathrm{T}}$、$\mathbf{v} = (7, 18, 25)^{\mathrm{T}}$ として $\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{v}$ と表される。$\mathbf{M} = \mathbf{A}\mathbf{B}$ であるから、

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{v} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}.$$

順序に注意すること：$(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ である。まず、

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ -28 + 18 \\ \frac{1}{2}(49 - 18 - 25) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix},$$

次に、

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 7 + 30 - 33 \\ -10 + 9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

よって、ただ 1 つの解は

$$x = 4, \qquad y = -1, \qquad z = 3.$$

これが一意であるのは、$\mathbf{M}$ が正則（invertible）だからである：$\det \mathbf{M} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B} = (1 \cdot 1 \cdot (-2))(1) = -2 \neq 0$。

## 検算

代入して確かめる：$4 - 3 + 6 = 7$, $16 - 13 + 15 = 18$, $12 - 8 + 21 = 25$。3 つの方程式はすべて成り立つ。また、正確な分数計算により $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{M}$ であること、および $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ が確かに $\mathbf{M}^{-1}$ であることも確認した。その最下行は $(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ である。印刷された値 $e = 1$ を用いると、積 $\mathbf{A}\mathbf{B}$ の最下行は $(3, 10, 1)$ となり、誤植であることが裏づけられる。

## よくある間違い

- 印刷された $e = 1$ をそのまま信じ、(3,2) 成分と (3,3) 成分を無理に合わせようとする。求めた $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ は必ず掛け合わせて確かめること。
- $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ の代わりに $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}$ を用いる。
- 求めた値が条件を満たすことを示すだけで、他の値がありえないことを論じない。

## STEP のその先へ

これが *LU* 分解であり、コンピュータが実際に連立 1 次方程式を解く方法である。ガウス（Gauss）の消去法は、実は $\mathbf{M} = \mathbf{LU}$ と分解する過程にほかならない。いったん分解してしまえば、右辺が新しくなるたびに必要なのは前進代入（forward substitution）と後退代入（back substitution）だけであり、消去をやり直す必要はない。一般には、先に行の入れ替えが必要になることがあり、その場合は $\mathbf{PM} = \mathbf{LU}$ となる。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、この考え方を軸に丸 1 章を構成している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。