解答例

STEP III 1993、第 2 問

純粋数学 • 変曲点と極座標による面積

STEP III 1993、問 2

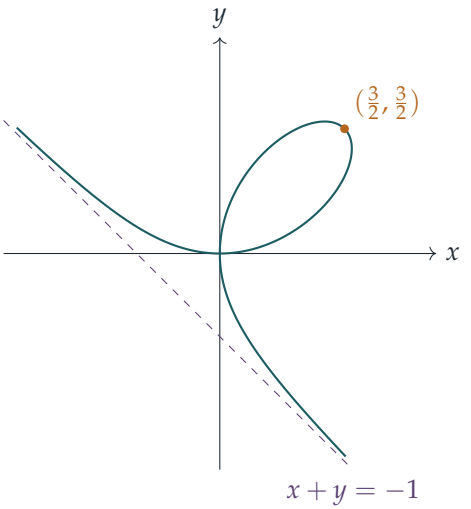
先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/93-s3-q2

鍵となる考え方

変曲点（point of inflection）では第 2 次導関数（second derivative）が 0 になり（かつ符号が変わら）なければならない。そこで (i) の方針は、陰関数微分（implicit differentiation）によって $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ を求め、それがいつ 0 になりうるかを調べることである。計算は重そうに見えるが、曲線の方程式そのものを使うと分子はごく簡単な式に縮む。(ii) では、3 次の項と xy の項の次数が異なるので、極座標（polar coordinates）に直すと因数 r^2 が約分され、r が θ の陽な関数として得られる。

解答



図は曲線（デカルト（Descartes）の正葉線（folium of Descartes））の概形である。第1象限にループがあり、第2象限と第4象限にある2本の枝が漸近線（asymptote）$x+y=-1$ に近づいていく。

小問 (i)

$x^3+y^3=3xy$ を x について陰関数微分すると、

$$3x^2+3y^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3y+3x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \qquad \text{よって} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{N}{D}, \quad N=y-x^2,\ D=y^2-x,$$

となる（ただし $D\neq 0$ のところで）。この商を微分し、$y'=N/D$ として $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}=y'-2x$ と $\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}x}=2yy'-1$ を用いると、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}&=\frac{(y'-2x)D-N(2yy'-1)}{D^2}=\frac{(N-2xD)-(2yN^2/D-N)}{D^2}\\&=\frac{2(ND-xD^2-yN^2)}{D^3}.\end{aligned}$$

ここで括弧の中を展開する。

$$\begin{aligned}ND&=x^3+y^3-x^2y^2-xy,\\xD^2&=xy^4-2x^2y^2+x^3,\\yN^2&=y^3-2x^2y^2+x^4y,\end{aligned}$$

であるから、

$$ND-xD^2-yN^2=3x^2y^2-xy-xy^4-x^4y=-xy\,(1+x^3+y^3-3xy).$$

C 上では $x^3+y^3-3xy=0$ なので、この括弧はちょうど1となり、

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{-2xy}{(y^2-x)^3}.$$

考えてみよう これが0になりうるのはどこか。また、この式が使えなくなる点ではどうなるか。

第2次導関数が0になるのは $x=0$ または $y=0$ のときに限る。C 上では、$x=0$ ならば $y^3=0$ となり、$y=0$ ならば $x^3=0$ となる。いずれにせよ原点であり、原点は変曲点ではないと仮定してよい。原点と $y^2=x$ を満たす点を除けば、第2次導関数は連続で0にならないから、符号を変えることはできない。したがって、そこに変曲点はない。

残るのは $D=y^2-x=0$ となる点であり、そこでは y は x の微分可能な関数ではない。もしそこで N も0ならば、$x=y^2$ かつ $y=x^2$ なので $x=x^4$ となり、$(0,0)$ また

は $(1,1)$ を得る。しかし $1+1 \neq 3$ であるから $(1,1)$ は C 上にない。よって原点以外のそのような点ではすべて $N \neq 0$ であり、接線は鉛直（vertical tangent）である。したがって x を y の関数とみなして扱うべきである。C の方程式は x と y について対称なので、上の計算で文字の役割を入れ替えると

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2} = \frac{-2xy}{(x^2-y)^3},$$

を得る。これは定義されており（$x^2 - y = -N \neq 0$ であるから）、かつ 0 でない（原点以外では $xy \neq 0$ であるから）。よって、これらの点でも曲線の曲がる向きは変わらない。

以上より、C は変曲点をもたない。

小問 (ii)

$x = r\cos\theta$、$y = r\sin\theta$ とおく。すると

$$r^3(\cos^3\theta + \sin^3\theta) = 3r^2\cos\theta\sin\theta,$$

であり、$r \neq 0$ のとき r^2 で割ることができて

$$r = \frac{3\cos\theta\sin\theta}{\cos^3\theta + \sin^3\theta}.$$

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ では分子と分母はともに非負（かつ分母は正）であるから $r \geq 0$ であり、$r = 0$ となるのはちょうど $\theta = 0$ と $\theta = \frac{\pi}{2}$ のときである。したがって θ が 0 から $\frac{\pi}{2}$ まで動くとき、点は原点から出発して原点に戻り、ループをちょうど 1 周する。面積は

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} r^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\theta\sin^2\theta}{(\cos^3\theta+\sin^3\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

分子と分母を $\cos^6\theta$（$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ で正）で割ると、

$$A = \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\tan^2\theta\sec^2\theta}{(1+\tan^3\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

$u = \tan\theta$、$\mathrm{d}u = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$ と置換すると（置換積分（substitution））、u は 0 から ∞ まで動き、

$$A = \frac{9}{2}\int_0^{\infty} \frac{u^2}{(1+u^3)^2}\,\mathrm{d}u = \frac{9}{2}\left[-\frac{1}{3(1+u^3)}\right]_0^{\infty} = \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{3}{2}.$$

$u \to \infty$ のとき原始関数（antiderivative）は 0 に近づくので、この広義積分（improper integral）は収束（converge）する。よってループの面積は $\frac{3}{2}$ である。

検算

- ループの先端は $y = x$ となる点である。$2x^3 = 3x^2$ より $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ となり、原点からの距離は $\frac{3}{\sqrt{2}} \approx 2.12$ である。この長さで幅がおよそ 1 のループなら、面積は 1 から 2 程度になるはずであり、結果と合っている。
- 媒介変数表示（parametrisation）$x = \frac{3t}{1+t^3}$、$y = \frac{3t^2}{1+t^3}$（直線 $y = tx$ が C と交わる点）を用いて、無作為に選んだ点で $\frac{-2xy}{(y^2-x)^3}$ を媒介変数表示による第 2 次導関数と比較し、さらにどの枝でも曲率（curvature）の符号が変わらないことを確かめた。
- $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$ の中点則による数値積分と、媒介変数表示したループを 1 周する靴ひも公式（shoelace formula）による和は、どちらも 1.500000 を与える。

よくある間違い

- 第 2 次導関数を完全に展開してしまい、その中に $x^3 + y^3 - 3xy$ が現れていることに最後まで気づかない。この簡約こそが問題の核心である。
- 接線が鉛直になる点を忘れる。そこでは $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ は 0 なのではなく、定義されないのである。
- 面積を $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$ ではなく $\frac{1}{2}\int r\,\mathrm{d}\theta$ と書いてしまう。

STEP のその先へ

陰関数微分は陰関数定理（implicit function theorem）によって正当化される。すなわち、$\partial F/\partial y \neq 0$ となる任意の点の近くでは、方程式 $F(x, y) = 0$ は確かに y を x の滑らかな関数として定める。原点では両方の偏導関数（partial derivative）が 0 になり、そこは 2 本の枝が交差する特異点（singular point）である。だからこそ原点は特別な扱いを必要としたのである。また正葉線は有理曲線（rational curve）でもあり、その二重点（double point）を通る直線 $y = tx$ によって媒介変数表示される。この考え方は代数幾何学（algebraic geometry）へとつながっていく。これらすべての背後にある解析学については、Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。